

**Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении/А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко — М.: Машиностроение, 1990. — 264 с. — ISBN 5-217-00861-X.**

Изложен новый подход к решению задач, возникающих при моделировании технологических процессов в машиностроении и металлургии. Он основан на разработанной академиком А. Н. Тихоновым теории решения обратных и некорректных задач — теории регуляризации. Приведены конкретные примеры решения задач проектирования, контроля или управления технологическим процессом. Показана эффективность уже решенных задач, внедренных в производство, а также перспективные направления и рациональные области их использования.

Для научных работников, а также ИТР, занимающихся проектированием технологических процессов с помощью САПР.

Библиогр.: 104 назв. Ил. 127. Табл. 6.

**Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. В. Т. Борисов**

Т  $\frac{1402020000-001}{038(01)-90}$  1—90

© А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер,  
В. Б. Гласко, 1990

ISBN 5-217-00861-X

Вычислительная техника при двухмерном и даже объемном конструировании в различных системах автоматизированного проектирования хорошо зарекомендовала себя и все шире используется в производственной практике. Теоретические и экспериментальные разработки в этой области весьма значительны и продолжают развиваться. Существенно продвинулась компьютерная техника в различные сферы документооборота, в том числе и конструкторско-технологического. Вместе с тем в области исследований различных технологических процессов, особенно в машиностроении, наблюдается существенное отставание. Решение отдельных задач или замена традиционных релейных схем управления на микропроцессорные со старой философией анализа процессов управления не обеспечивают качественного изменения в результатах.

Главное условие эффективного автоматического управления технологическим процессом — идентификация действующих на него факторов, необходимых и достаточных для того, чтобы управляющая машина выполняла свою задачу с учетом происходящих в реальной действительности изменений без снижения выходных показателей продукции.

Чтобы гарантировать стабильность управляемых параметров качества, достаточно иметь адекватную математическую модель, устанавливающую взаимосвязь между ними и влияющими на них факторами, которыми определяется необходимость изменения режимов технологического процесса. Таким образом, автоматизация управления реальными технологическими процессами с помощью вычислительных машин зависит во многом не столько от возможностей и надежности собственно машин, которые непрерывно возрастают, сколько от наличия разработанных, надежных с точки зрения реального производства моделей, позволяющих идентифицировать технологический процесс или в целом, или при доминировании одного или нескольких факторов.

Трудность реализации многих математических моделей (динамических уравнений) связана с отсутствием соответствующих уравнений состояния, а при их наличии — с отсутствием необходимых значений физических констант для конкретных коэффициентов в таких уравнениях. Последнее часто приводит к значительным упрощениям или заменам, например, при конечно-элементном моделировании и, как следствие, существенным отклонениям от реальной технологии.

В настоящей монографии впервые на базе разработанной одним из авторов [46] теории решения некорректных задач показана возможность нового нетрадиционного подхода к решению разнообразных инженерных и, прежде всего, технологических проблем и их реализации в действующем производстве.

Разработчики новых технологических процессов, специалисты в области управления или совершенствования производства, ознакомившись с материалом, представленным в монографии, смогут убедиться, как при условии ограниченного числа известных физических параметров и минимальном объеме дополнительных простейших поверочных экспериментов можно создать надежные математические модели широкого спектра технологических процессов для прогнозирования результатов или для управления этими процессами на практике.

Специалисты в области математической физики, программисты получают после ознакомления необходимые навыки в аппаратном обеспечении, убедятся в больших практических резервах, заложенных в методе обратных задач.

Собранные конкретные примеры, рассматриваемые в книге, есть обобщенные результаты многолетнего сотрудничества авторов в рамках работ ПО ЗИЛ и МГУ в области моделирования технологических процессов, основанного на методе обратных задач, многие из которых внедрены в повседневную практику.

Принимая во внимание двуединую направленность монографии — для разработчиков и для пользователей, — авторы ввели наряду с практическими примерами реализации задач разделы, знакомящие с существом и возможностями метода обратных задач.

Конкретная реализация задуманного авторами стала возможной благодаря большой помощи как сотрудников МГУ, так и специалистов ПО ЗИЛ.

Авторы выражают искреннюю благодарность активной участнице математического эксперимента по целому ряду задач, оказавшей также большую помощь при подготовке рукописи к печати, Наталье Игоревне Кулик.

За участие в решении различных задач математического моделирования, частично отраженных в настоящей монографии, авторы выражают благодарность бывшим студентам и аспирантам физического факультета МГУ: В. В. Акименко, И. А. Богомоловой, Е. В. Булычеву, Е. А. Вишневской, М. Е. Ильину, Ю. А. Криксину, С. Н. Овчинникову, Н. И. Ольховской, Е. В. Полежаевой, М. К. Трубецкову, С. Н. Фадеевой, Т. А. Черенковой.

Авторы благодарят проф. А. Г. Свешникова, а также ведущих сотрудников ПО ЗИЛ: И. Н. Шклярова, С. А. Юрасова, Ю. К. Евсеева, В. А. Ковригина, Я. В. Шуберта, С. М. Федорова, В. П. Романова — за плодотворные обсуждения постановок прикладных задач, организацию лабораторных экспериментов и внедрение результатов в практику, а также А. В. Мартыякову за оказание помощи в подготовке рукописи к печати.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОД ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

---

Математическое моделирование как альтернатива пробному физическому эксперименту по мере усложнения техники и решаемых инженерных задач все прочнее входит в практику производства, как достаточно эффективный и экономически выгодный путь в подготовке любого нововведения.

В широком смысле математическое моделирование есть процесс оперирования созданной по исходным физическим параметрам моделью, обеспечивающий получение данных о поведении интересующего объекта.

В отличие от реально поставленного эксперимента математическая модель имеет ряд преимуществ, которые связаны с тремя основными аспектами. Во-первых, это экономия материальных ресурсов, требуемых для постановки и проведения физического эксперимента; во-вторых, возможность апробации системы в экстремальных условиях и даже за их пределами; в-третьих, оценка работоспособности систем с длительными технологическими (дни, недели, месяцы, годы) циклами в существенно более сжатые сроки (например, исследование процессов нагрева на сотни градусов со скоростями ниже десятых долей градуса в час).

В практической инженерной деятельности, ограниченной проблемами моделирования технологических процессов в машиностроении, речь может идти о моделировании на так называемом микроуровне в отличие от макроуровня и метауровня, когда модели охватывают системы точных технических объектов или более общих управленческих и экономико-социальных структур.

Принципиальное различие в уровнях моделирования определяется величиной неделимого объекта, которая при переходе к более высокому уровню естественно возрастает. Для рассматриваемой узкой проблемы математическая модель по форме представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поведение объекта в окружающей среде с установленными краевыми и начальными условиями.

Поскольку даже для известных уравнений точные решения могут быть получены только для отдельных частных случаев, математическое моделирование означает, по нашему мнению, выполнение трех основных этапов:

формулировку математической модели объекта, сопоставимой с имеющимися или прогнозируемыми экспериментальными данными, включая разработку методов построения такой модели при недостатке исходной информации;

разработку методов решения соответствующей математической задачи и их реализацию в программах для ЭВМ;

проведение в рамках принятой модели математического эксперимента (серия расчетов на ЭВМ), а также последующая обработка и анализ его результатов с обратной связью.

В дальнейшем весь этот комплекс работ и будем понимать как математическое моделирование технологических процессов.

Разумеется, выполнение работы по математическому моделированию предполагает достаточную оснащенность производственных коллективов вычислительной техникой высокого уровня и обеспечение ее бесперебойной работы. В этом случае завершающий этап моделирования способен привести к обнаружению новых эффектов и на этой основе к повышению эффективности производства, как будет видно из дальнейшего содержания настоящей книги.

Остановимся здесь несколько подробнее на первых двух этапах, не анализируя пока вопрос о качестве входной информации.

Формулировка математической модели объекта должна быть продуктом совместной работы технолога (конструктора) и математика при ведущей на этом этапе роли технолога (конструктора); последнее связано прежде всего с тем, что подавляющее большинство прикладных задач по моделированию технологических процессов являются оптимизационными, и постановщик задачи (технолог или конструктор) должен указать требуемое множество переменных технологических параметров, определяющих заданное качество объекта, а также сформулировать обязательные ограничения, связанные с реализацией в производстве поставленной задачи (например, размеры конечного продукта, предельные усилия или скорости резания).

Участие математика на этой стадии необходимо (лучше специалиста в области математической физики), во-первых, для установления структурных связей между переменными и ограничениями, заданными технологом; во-вторых, для внесения при недостатке исходных данных методических рекомендаций по совместной доработке построения модели, включая получение косвенной или прямой дополнительной информации об объекте, характерной для решения аналогичной или близких задач. Такой подход на первой стадии позволяет, с учетом опыта каждой из сторон, установивших оптимальное и достаточное для постановки задачи множество характеристик объекта проектирования, множество характеристик элементов его и множество связей объекта, обеспечить на ранних стадиях разработки существенную экономию времени интеллектуальной деятельности на последующих этапах как с методической, так и с концептуальной точек зрения.

На начальной стадии формулирования модели обеспечивается объем работ, аналогичный предпроектным оценкам при традиционном проектировании, включающем так называемые компоновочные решения. Для конструкторских проектов эта стадия как бы символизирует эскизное проектирование. Соответственно результатами завершения ее должны быть:

качественная оптимизационная модель процесса с учетом ее однородности либо установленной структуры подсистем;

общие принципы установления критериев оптимизации с учетом увязки экономических и технических целей;

общие принципы формулирования ограничений (на этой стадии ограничения формулируются без использования математической символики);

выяснение недостающей информации для последующей математической постановки задачи.

Второй этап моделирования — математическая постановка задачи — также должна осуществляться на базе сотрудничества технолога и специалиста по математической физике, но здесь роль математика становится определяющей. Это связано с тем, что подавляющее большинство технологических процессов формируются на основе различных физических процессов: нагрев, охлаждение, силовое воздействие (резание, давление); пространственные перемещения и т. д., которые описываются дифференциальными уравнениями обыкновенными или в частных производных: это и элементы расчета технологического оборудования, оснастки, инструмента, транспортных систем на прочность и расчет тепловых режимов или диффузионных процессов в жидкостях, газах или твердых телах и многое другое. Описывающие процесс дифференциальные уравнения имеют множество решений. Для того чтобы получить единственное решение, а это и есть основа любого технологического процесса, так как единственное решение обеспечивает и единственное обеспечение исполнительных механизмов, нужно задать граничные или краевые условия, а для нестационарных задач (нестационарные нагревы при использовании ТВЧ, лазерных источников, плазмы и т. д.) — начальные условия. Гарантировать корректность постановки задачи в смысле существования и единственности решения — цель математика.

Выбранное дифференциальное уравнение в частных производных (или система таких уравнений) вместе с граничными и начальными условиями обычно составляет существо математической модели анализируемого объекта и результат выполнения первого этапа, наряду с предоставлением технологом дополнительных экспериментальных данных.

После установления на первом этапе единственности решения для технолога (конструктора) возникает задача обеспечения требуемой точности его. К сожалению, для краевых задач во многих случаях не удастся получить их явных решений, поэтому возникает проблема разработки математических алгоритмов, обеспе-

чивающих нужную точность. Основой этого служит замена сформулированной математической модели приближенной. Это задачи второго этапа.

Для механики сплошных сред, процессов термодинамики, аэродинамики наибольшее распространение получили методы конечных разностей (МКР), методы конечных элементов (МКЭ), а также методы граничных интегральных уравнений (МГИУ).

Первые два метода используют аппроксимацию искомым непрерывных функций совокупностью ее значений. В МКР эти значения относятся к узловым точкам, регулярно покрывающим область определения, вплоть до ее границ. Все эти узлы увязываются в общую «сетку», и поэтому метод иногда называется сеточным. В МКЭ «узлы» выбираются на границах заранее выделенных элементов, и по соответствующим угловым значениям функции строится более простая непрерывная. Третий метод реализуется переходом от дифференциального уравнения в частных производных к эквивалентному интегральному.

Во всех трех рассмотренных методах задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Порядок аппроксимирующей системы уравнений при моделировании сеточными методами в трехмерном пространстве высок и для сложных областей может достигать величин  $10^5$ — $10^6$ . В отличие от МКЭ неизвестные величины при МГИУ выбираются только на границе исходной области. Поэтому система разрешающих уравнений существенно меньше, однако возникают трудности, связанные с тем, что матрица такой системы «плохо обусловлена», т. е. имеет определитель, близкий к нулю. Вследствие этого задача о решении системы оказывается неустойчивой по самой постановке. Значит, проблема разработки устойчивых алгоритмов является достаточно общей при итоговой замене исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений алгебраической системой уравнений. Для преодоления неустойчивости можно использовать различные регулирующие алгоритмы [86], к числу которых относятся и специальные приемы (метод граничных суперэлементов и др.), улучшающие МГИУ [10].

Указанные методы решения краевых задач очень широко и достаточно успешно используются для реализации многих инженерных проектов.

Так, ПО ЗИЛ совместно с МГУ на основе применения сеточных методов проведено математическое моделирование технологических процессов термической обработки сплошных и порошковых изделий, в том числе процессов цементации и закалки. В последнее время метод сеток развит для гидродинамических расчетов<sup>1</sup> (в основе лежат уравнения Навье—Стокса). Его модификации успешно использованы для анализа проведения сжимаемых и не-

---

<sup>1</sup> Hutchings B., Annurelli R. Taking the measure of fluid dynamics. Software/mechanical engineering. 1987. Т. 109, N5. P. 72—76.

сжимаемых потоков, включая потоки с нарушениями непрерывности, т. е. с ударными волнами.

Методом МКЭ решен ряд задач по прочностным расчетам отдельных узлов автомобилей [78, 79], элементов оснастки, в частности для бандажированных матриц для холодной объемной штамповки [37], оптимизации систем охлаждения в двигателях [79] и ряд других.

Представляется чрезвычайно интересным развитие этих методов для анализа технологических процессов с использованием энергии взрыва: жидкостная штамповка взрывом, сварка взрывом, удаление взрывом обломков инструментов в замкнутом пространстве, а также для анализа поведения конструкции при ударно-усталостных нагружениях.

Все рассмотренные подходы МКЭ, МКР и МГИУ относятся к решению «прямых» задач, т. е. тех уравнений, где, как представляется авторам, имеется полная исходная информация, необходимая для получения решений.

Выбор метода решения задачи и реализация его в программе для ЭВМ и составляет содержание второго этапа моделирования. На этом пути возникает, как было отмечено, ряд чисто математических проблем относительно точности, сходимости, устойчивости.

Обратимся теперь к анализу физического содержания информации, принимаемой на первой стадии математического моделирования, где в силу отсутствия однозначных параметров и уравнений, описывающих связи между ними, часто закладываются основные допущения, приводящие к определенной «некорректности» по отношению к реальным процессам в действующем производстве. Возьмем любой процесс механической обработки, будь то штамповка или резание с ударным или статическим нагружением. Он всегда сопровождается пластической деформацией металлов. Моделирование закономерностей пластической деформации является очень сложной задачей. Даже если не учитывать физические модели дислокационного упрочнения многофазных реальных сплавов, собственно механика деформационного упрочнения дает десятки различных зависимостей напряжение — деформация, наиболее распространенные из которых приведены в табл. 1.1.

Даже поверхностный анализ этих, казалось бы, близких выражений показывает, что только по Воусу деформация идет с насыщением, а следовательно, для весьма больших деформаций по крайней мере одно из выражений 1—3 не отражает реальной закономерности — неадекватно ей, а его использование на практике физически некорректно.

Можно говорить о серьезных отклонениях от реальных производственных процессов при рассмотрении таких показателей, как чувствительность конкретного сплава к скорости деформации (даже резание допускает сегодня скорости от  $10^2$  до  $3 \cdot 10^6$  м/мин;

### 1.1. Типичные уравнения деформационного упрочнения металлов

Соотношение	Автор	Источник
1. $\sigma = K\varepsilon^n$	Холломон L. H.	[98]
2. $\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n$	Людвиг Р.	[101]
3. $\sigma = K(\varepsilon + \varepsilon_0)^n$	Свифт М.	[102]
4. $\sigma = \sigma_s - (\sigma_s - \sigma_0) \exp\left(\frac{\theta_0 \varepsilon}{\sigma_s - \sigma_0}\right)$	Воус Е.	[41]
5. $\sigma = \sigma_0 + 25\varepsilon^{1/2} d^{-1/4}$	Екобори Т.	[30]

Примечание.  $\sigma$  — напряжение;  $\varepsilon$  — деформация;  $\sigma_0$ ,  $\sigma_s$ ,  $K$ ,  $\theta$  — постоянные, имеющие размерность напряжения;  $\varepsilon_0$  и  $n$  — безразмерные коэффициенты, которые для каждого выражения имеют свои значения.

еще больший разброс в скоростях деформации для различных схем штамповки); оценка сложнапряженных состояний с учетом переменной силы трения; возможные изменения фазовых и структурных превращений (например, образование мартенсита в некоторых сталях при их деформации) и многое другое.

Поэтому, в частности, в конечно-элементных машинных программах часто используют «подгонку» к экспериментальным кривым, базируясь на тех или иных удобных зависимостях, взятых, например, из табл. 1. Достаточно общей чертой моделирования в технологии является то, что большинство разработчиков новых процессов штамповки или резания продолжают пользоваться дополнительно, а иногда полностью дорогостоящим методом проб и ошибок, так как схемы вычислений в современных программах упругопластических расчетов, хотя и достигли высокого уровня сложности, не подкреплены пока более «корректными» определяющими уравнениями.

Другая группа трудностей, снижающая точность решений «прямых» задач даже при наличии достаточно строгих законов, определяющих физический процесс (например, уравнение теплопроводности однородных сред), вызвана отсутствием достоверных для конкретного случая коэффициентов. Так, математическое моделирование теплового профиля валков при прокатке наталкивается на практике на незнание точного распределения коэффициента теплопередачи по параметру цилиндрической поверхности вала. В работе [89] лишь в специальном лабораторном эксперименте удалось достаточно точно определить, и то усредненное по окружности вала, значение этого коэффициента.

Аналогичные причины, связанные с использованием не вполне корректных в физическом плане для конкретного случая техноло-

гического процесса основных уравнений или входящих в них коэффициентов, приводят к необходимости дополнительной экспериментальной проверки и корректировки вычислений или к постановке предварительных экспериментов для прямого установления различных коэффициентов. Примеров этого, относящихся к реальной практике, достаточно много описано в отечественной и зарубежной литературе. Так поступают, например, при оптимальном выборе пунктов контроля технологических процессов [54]; при исследовании процессов холодной прокатки полосы; изучении процесса ортогонального резания для жесткопластических тел, моделировании винтовой прокатки; процессов кристаллизации в слитках непрерывной разливки и во многих других случаях.

Поэтому точность решений прямой задачи в реальной практике для конкретных технологических процессов требует дополнительных, достаточно сложных физических экспериментов, что снижает эффективность оптимального математического моделирования.

Современная математическая наука дает инженерам иную возможность для повышения эффективности моделирования технологических задач.

Поскольку некоторые параметры, входящие в уравнения, принимаются с большими допущениями, их можно рассматривать как неизвестные для конкретно поставленной задачи математического моделирования технологических процессов. Для их определения следует использовать косвенную информацию: данные о решении уравнения, которые экспериментально получить значительно проще. Такие задачи можно рассматривать как обратные.

Обратные задачи этого типа формулируются на первой стадии моделирования совместными усилиями математика и технолога, которому предстоит доставить нужную косвенную информацию об объекте.

В отличие от задач прямого моделирования обратные задачи относятся к классу «некорректных» (в математическом смысле), в частности неустойчивых относительно погрешности входных данных. Однако современная математика обладает средствами для их решения [23, 86], что существенно расширяет возможности математических экспериментов. Разработка специальных «регуляризирующих» алгоритмов для этой цели выполняется математиком на втором этапе моделирования. Поскольку эти методы для моделирования в машиностроении пока используются мало, главным образом из-за слабого знакомства конструкторов и технологов с их возможностями, следует рассмотреть проблему подробнее, тем более что к классу обратных задач можно и следует относить задачи оптимизации технологических процессов, а также проектирование технологического оборудования, оснастки и инструмента с заранее заданными свойствами.

## 1.1. КЛАСС ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

### 1.1.1. Понятие и типы обратных задач

Как все явления природы, технологические процессы управляются объективными закономерностями и, если последние достаточно хорошо изучены, могут быть описаны уравнениями дифференциальными или интегральными. Такие уравнения с присоединением, если нужно, дополнительных условий (граничных и начальных) [84], позволяющих выделить единственный, интересующий нас процесс из множества возможных, представляют собой приближенную математическую модель технологического процесса, и мыслимы различные аспекты целевой постановки задач, связанных с анализом этой модели.

Простейшим примером может служить математическая модель, описывающая прямолинейное неравномерное движение материальной точки массой  $m$  под действием силы  $f(\tau)$  при заданных начальных условиях

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(\tau) &= f(\tau), \quad 0 < \tau < T, \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Модели такого типа могут быть элементами более сложных систем, описывающих механические процессы в машинах, и читатель без труда найдет соответствующие аналоги. Данный пример не ограничивает общности анализа, а лишь упрощает иллюстрацию основной идеи.

Относительно задачи (1.1) нас могут интересовать следующие вопросы.

1. Каков закон движения материальной точки  $x = x(\tau)$  при известных «причине ускорения»  $f(\tau)$  и «инерционной характеристике» движущегося объекта  $m$ ? Это классическая задача механики, и ее решение позволяет либо составить качественное представление о движении, либо численно моделировать процесс, например, с помощью ЭВМ.

2. Пусть из наблюдений известен закон движения. Какова в этом случае вынуждающая сила при известной массе либо (при известной силе) масса объекта? Решение одной из этих задач позволило бы охарактеризовать либо причину движения, либо свойство объекта.

Первая задача и любая из двух последних являются взаимно обратными. Однако в первом случае речь идет об изучении некоторого следствия при заданных причинах и условиях, во втором — об изучении этих последних по заданному следствию. Задачи второго типа и называются обратными в отличие от задачи прямого моделирования, примером которой является первая из названных.

Как задачи, связанные с «обращением» причинно-следственной связи, обратные задачи отражают общую проблему фундаменталь-

ных научных исследований: по некоторым характеристикам наблюдаемых явлений установить их причины — и отличаются лишь тем, что рассматриваются в точной математической постановке.

Можно отметить характерный признак обратных задач [1]: их физическая нереализуемость. Действительно, в рассмотренном примере абсурдна мысль об эксперименте, воссоздающем силу, действующую на объект, либо его массу по заданному закону движения. Но это значит, что в отличие от задач прямого моделирования (в современной научной литературе такие задачи условно называются «прямыми») решение обратных задач без математики со всем арсеналом ее средств просто невозможно.

Вероятно, нет в современной науке области знаний, где бы ни разрабатывались обратные задачи, и классическими примерами являются астрофизика [25] и физика земных недр, где о свойствах реальных объектов, недоступных или труднодоступных прямому изучению, судят по косвенным их проявлениям: излучению далеких звезд, физическим полям, наблюдаемым на поверхности земли [85]. Аналогично этому в технологии производства предметом обратных задач могут быть внутренние состояния деталей и конструкций, изучаемые по измерениям на их поверхности, например термические состояния по излучению во вне. Их предметом может быть также определение неизвестных физических характеристик материалов по измеряемым, например, температурным полям.

Указанные задачи, включая и рассмотренный вначале пример, относятся к типу, который естественно назвать *интерпретацией* данных наблюдений. Они называются также задачами распознавания или диагностики в зависимости от специфики области применений. Будем пользоваться первым из этих терминов, отметив, что в указанных случаях речь идет об изучении скрытых свойств реально существующих объектов.

В числе задач интерпретации можно выделить, как частный случай, инструментальные задачи, предметом которых является восстановление сигнала на входе некоторого прибора по выходному сигналу при известной аппаратной функции (спектральной или импульсной характеристике) прибора или восстановление самой этой характеристики по калибровочному сигналу на входе и измеренному на выходе. Эти задачи в одинаковой мере связаны и с наукой, и с производством ввиду использования здесь контрольно-измерительной аппаратуры. Решение первой из названных задач с помощью ЭВМ [23, 70] позволяет повысить разрешающую способность контрольно-измерительного прибора (КИП); КИП плюс ЭВМ, снабженная программой специальной обработки выходного («сглаженного») сигнала, становится новым прибором теоретически с бесконечной разрешающей способностью.

Представление об обращении причинно-следственной связи в постановке обратных задач расширяет их класс. С этой точки

зрения к числу обратных естественно отнести задачи *управления*, предметом которых является поиск в рамках заданной математической модели управляющей функции, обеспечивающей с некоторым допуском заранее заданный результат процесса или явления.

К этому типу обратных относятся и задачи оптимального управления технологическими процессами (ТП), и стоит отметить (о чем уже упоминалось во введении), что в технологии производства часто оказываются связанными все перечисленные типы обратных задач. Действительно, для решения задачи управления требуется математическая модель ТП, а для ее формулировки нужны, в частности, физические характеристики материалов, не всегда известные, поскольку последние определяются по данным косвенных наблюдений, возникает проблема повышения их точности, т. е. решения некоторой инструментальной задачи.

Точно так же к числу обратных относятся задачи *синтеза* или разработки (проектирования) новых приборов и конструкций с заранее заданными (в пределах известного допуска) эксплуатационными характеристиками, поскольку такие задачи решаются в рамках точной математической постановки.

Задачи двух последних типов отличаются от задач интерпретации (и инструментальных) тем, что в них речь идет о еще не существующем объекте или явлении, которые предстоит реализовать.

Такова общая характеристика класса обратных задач.

### 1.1.2. Математическая особенность обратных задач

Рассмотрим в качестве примера возможную математическую модель инструментальной задачи. Пусть функция времени  $z(\tau)$ , где  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ , изображает сигнал, подаваемый на вход прибора с известной импульсной характеристикой  $K(\tau_1 - \tau)$ ;  $u = u(\tau_1)$  — сигнал на выходе прибора (рис. 1.1). Связь между входным и выходным сигналами осуществляется с помощью интегрального соотношения [86]

$$u(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} K(\tau_1 - \tau) z(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \tau_1 \leq T, \quad (1.2)$$

и при известной функции  $z(\tau)$  однозначно определяется функция  $u(\tau_1)$ .

В свою очередь  $z(\tau)$  — решение интересующей нас обратной задачи при известной  $u(\tau_1)$  — определяется интегральным уравнением, и обычно в такого рода задачах — также однозначно.

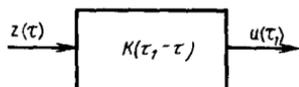
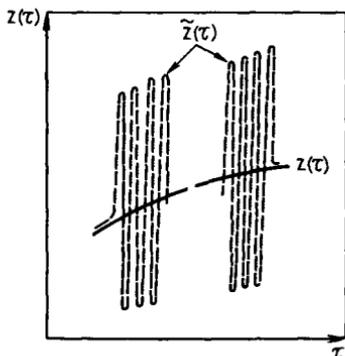


Рис. 1.1. Принципиальная схема прибора

Рис. 1.2. Возможный эффект некорректности задачи:

$z(\tau)$  — точное решение;  $\tilde{z}(\tau)$  — возмущенное решение



Последнее утверждение относится, как это подразумевается в классической математике, к точному заданию функции  $u(\tau_1)$ . Если же последняя задана с некоторой погрешностью, что характерно для экспериментальных данных, то ситуация принципиально меняется, о чем свидетельствует сопоставление прямой и обратной задач. Будем предполагать, как это обычно бывает,  $K(\tau_1 - \tau)$  — дифференцируемой функцией. Тогда в первой задаче любой непрерывной функции  $z(\tau)$  соответствует некоторая дифференцируемая  $u(\tau_1)$ , и при достаточно малом возмущении  $z(\tau)$  функция  $u(\tau_1)$  меняется сколь угодно мало. Иначе говоря, погрешности измерения входного сигнала оказываются несущественными для приближенного расчета выходного. В обратной задаче возмущения исходных данных  $u(\tau_1)$  может вывести эту функцию из множества дифференцируемых, а тогда при любой непрерывной  $z(\tau)$  равенство (1.2) нарушается. Следовательно, при таких возмущениях  $u(\tau_1)$  не существует решения интегрального уравнения (1.2). Это характерная ситуация, поскольку неизбежные погрешности измерений носят случайный характер и неуправляемы. Допустим, однако, что возмущенный сигнал  $u(\tau_1)$  остается в классе функций, при которых уравнение (1.2) разрешимо относительно  $z(\tau)$ , и пусть  $\tilde{z}(\tau)$  — точное решение уравнения (1.2) при  $u = \tilde{u}(\tau_1)$  из указанного класса. Можно заметить, что если вместо  $\tilde{z}(\tau)$  подставить под интеграл функцию  $\tilde{z}(\tau) = z(\tau) + A \sin \omega \tau$ , то при каком угодно большом значении амплитуды  $A$ , но достаточно большом значении частоты  $\omega$  интеграл

изменится мало:  $\int_0^{\tau_1} K(\tau_1 - \tau) \tilde{z}(\tau) d\tau = \tilde{u}(\tau_1) + AS(\omega, \tau_1)$ , где

$S(\omega, \tau_1) = \int_0^{\tau_1} K(\tau_1 - \tau) \sin \omega \tau d\tau$ , причем  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega, \tau_1) = 0$ . Та-

кая ситуация — следствие сглаживающего действия операции интегрирования по отношению к высокочастотным колебаниям подынтегральной функции [33]. Но это значит, что даже малым возмущениям исходных данных рассматриваемой обратной задачи может соответствовать сколь угодно сильное искажение искомого решения (рис. 1.2). Иначе говоря, задача оказывается неустойчивой по отношению к малому возмущению выходного сигнала, неизбежному при измерениях.

Аналогичное наблюдение относится, очевидно, и к тем задачам интерпретации, которые описываются уравнением Фредгольма первого рода

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi) z(\xi) d\xi, \quad x \in [c, d] \quad (1.3)$$

в условиях взаимно однозначного соответствия между  $u(x)$  и  $z(\xi)$  (при точном задании  $u(x)$ ). К такому виду может быть преобразовано и уравнение (1.2).

Возникает парадоксальная на первый взгляд ситуация. Представим себе, что по заранее заданной  $\bar{z}(\xi)$  (при известной  $K(x)$ ) мы вычислили  $\bar{u}(x)$  (разумеется, с неизбежной погрешностью). Решим каким-либо из известных нам приближенных методов уравнение (1.3) с такой правой частью. В результате вместо ожидаемого воспроизведения, хотя бы и приближенного, функции  $\bar{z}(\xi)$  получим, вообще говоря, нечто совершенно на нее непохожее.

Справедливость этого утверждения иллюстрируется следующим математическим экспериментом на ЭВМ. Положим  $K(x, \xi) = (1/\pi)(1 + (x - \xi)^2)^{-1}$ ,  $c = a = -1$ ,  $d = b = 1$ ,  $\bar{z}(\xi) = \xi^2(1 - \xi^2)$  и вычислим значения  $u(x)$  по формуле (1.3) на заданной сетке значений  $\{x_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) с машинной точностью, так что погрешность значений  $u(x_i)$  в каждой точке не более  $\delta = 10^{-9}$ . Желая получить приближение не слишком грубым, возьмем достаточно мелкую сетку  $m = 20$ , в точках которой будем определять и приближение  $z(\xi)$ , пользуясь для этой цели алгебраическим методом, при котором уравнение (1.3) заме-

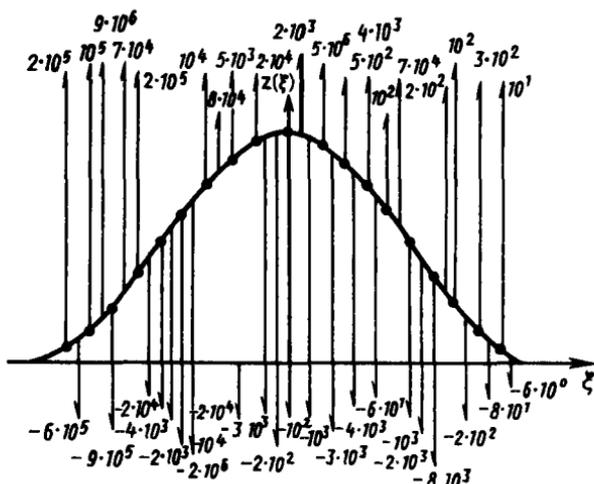


Рис. 1.3. Результат приближенного решения некорректной задачи:  $z(\xi)$  — точное решение;  $u(x_i)$  — приближение к решению

Рис. 1.4. Погрешность вычисления производной:

$f(\tau)$  — точная функция;  $\tilde{f}(\tau)$  — приближенная функция

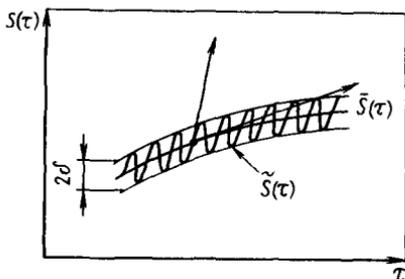
няется системой линейных алгебраических уравнений с матрицей порядка  $m = 20$ . Результат решения этой задачи на ЭВМ БЭСМ-6 по стандартной программе, реализующей метод Гаусса, представлен стрелками на рис. 1.3. Видно, что использовать подобное «приближение» для практических целей невозможно.

Аналогичным свойством обладает задача об определении силы (также обратная), связанная с уравнением (1.1). При точном задании закона движения  $S = S(\tau)$  — дважды дифференцируемой функции —  $f(\tau)$  однозначно определена формулой (1.1) при прочих известных величинах. Однако если  $S = S(\tau)$  определена с погрешностью (неконтролируемой при измерениях), то даже при малой ее величине погрешность вычисления первой, а тем более второй производной может оказаться сколь угодно большой (рис. 1.4) и, следовательно,  $\hat{f}(\tau)$ , рассчитываемая по той же формуле, окажется совершенно непохожей на истинную силу.

Отмеченная особенность обратных задач в рассмотренных примерах имеет в математике определенное имя.

Отвлекаясь от конкретных примеров, рассмотрим произвольную количественную задачу (прямую или обратную), состоящую в нахождении некоторого решения по исходным данным. Первое решение обозначим через  $z$  и будем считать, что оно выбирается из некоторого множества  $Z$  ( $z \in Z$ ) элементов той или иной математической природы (векторы, функции и т. п.); второе обозначим через  $u$ , считая, что  $u \in U$  некоторого другого множества. Тогда наша задача может быть записана в виде  $z = R(u)$ , где  $R$  — некоторый «оператор», который можно понимать, как алгоритм вычисления искомой величины  $z$  по данной  $u$ . Характер множеств  $Z$  и  $U$ , свойства оператора  $R$  зависят уже от конкретной постановки задачи. В конкретных задачах вводятся меры близости элементов из указанных множеств (расстояние между ними или метрика), и тогда последние называются метрическими пространствами.

В соответствии с понятием, введенным в начале века Ж. Адамаром, задача  $z = R(u)$  называется корректно поставленной, если она удовлетворяет трем условиям; 1) при любом  $u \in U$  ее решение существует; 2) решение единственно при каждом  $u \in U$ ; 3) решение устойчиво при малых вариациях  $u$ , т. е. достаточно малые изменения величины  $u$  отвечают сколь угодно малые изменения величины  $z$  [86]. Если задача не удовлетворяет хотя бы одному из указанных условий, то она называется некорректно поставленной.



Очевидно теперь, что обратные задачи в рассматриваемых примерах относятся к числу некорректно поставленных, поскольку в них нарушается третье, а возможно, и первое условие.

Возможная некорректность постановки обратных задач и является их математической особенностью и, как увидим, общей особенностью класса.

Если для поиска приближенного решения обратной задачи использовать какой-либо классический алгоритм формально, не учитывая некорректности задачи, то рискуем получить результат, не имеющий ни научной, ни прикладной ценности (см. рис. 1.3).

Неизбежность этого связана с тем, что класс некорректно поставленных задач шире класса обратных. Наряду с отмеченными в примерах (1.1) и (1.2) задачами о решении интегральных уравнений первого рода и численного дифференцирования, в него входят [86] задачи о суммировании ряда Фурье (с неточными коэффициентами), аналитического продолжения функций комплексного переменного, задачи о решении плохообусловленных систем уравнений (в частности, линейных алгебраических с матрицей, определитель которой близок к нулю), задачи линейного программирования, некоторые краевые задачи математической физики [84, 86]. Некоторые из этих задач являются элементами классических алгоритмов, рассчитанных либо на «точную» постановку, т. е. такую, для которой заранее предполагается несущественное влияние погрешностей входных данных, что неверно для обратных задач.

В общности отмеченной специфики задач этого класса можно убедиться, рассматривая обобщающие классические их постановки.

### **1.1.3. Элементы обобщающих классических постановок обратных задач различных типов и вопросы их корректности**

Рассмотрим сначала задачи типа задач интерпретации данных наблюдений. В примерах (1.2) и (1.3) искомая характеристика объекта  $z$  определяется некоторым интегральным уравнением по заданной характеристике из множества наблюдений. Такое уравнение формулируется как ответ на вопрос «прямой» задачи, как по заданному  $z$  определить наблюдаемую величину  $u$ .

В других задачах интерпретации, связанных с технологией, выражение  $u$  через  $z$  может иметь неявную форму. Пусть, например, для описания некоторого высокотемпературного процесса в одномерной среде — «стержне» — нас интересует коэффициент теплопроводности материала стержня:  $z = \lambda(t)$ , и для его определения мы хотим воспользоваться измерением температуры на одном из торцов стержня как функции времени:  $u = t_{\text{тр}}(\tau)$ .

Пусть граничная температура измеряется в некотором эксперименте, когда стержень нагревается с противоположного торца ( $x = l$ ) источником интенсивности  $q$ , а на границе  $x = 0$ , где проводятся измерения, происходит конвективный теплообмен со средой постоянной температуры  $t_0$ , совпадающей с начальной температурой стержня.

Тогда можно утверждать, что при любой известной функции  $\lambda(t)$  температурное поле  $t = t(x, \tau)$  определяется решением задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) &= c(t) \gamma(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad x \in (0, l), \quad \tau > 0; \\ \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h(t|_{x=0} - t_0), \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=l} = q, \quad t|_{\tau=0} = t_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Очевидно, измеряемой температуре соответствует  $t_{np} = t(0, \tau)$  и, таким образом, задача (1.4) определяет неявно некоторую совокупность операции (обозначим ее  $A$ ), с помощью которой по заданному  $k(t)$  ставится в соответствие  $t_{np}(\tau)$ . В свою очередь, для обратной задачи  $t_{np}$  известно, и последнее соотношение является уравнением относительно  $k(t)$  с неявно заданным и тем не менее алгоритмически определенным оператором соответствия.

Переходя к общей постановке, обозначим теперь через  $Z$  метрическое пространство искомым в обратной задаче интерпретации характеристик объекта или процесса, а через  $U$  — пространство характеристик наблюдаемого явления (косвенных характеристик объекта). Пусть каждому  $z \in Z$  с помощью известного оператора  $A$  ставятся в соответствие  $u \in U$ :  $u = Az$ . Тогда обратная задача формулируется в виде операторного уравнения

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (1.5)$$

примеры которого были рассмотрены выше.

Эта естественная постановка задачи интерпретации некорректна по следующим причинам.

1. По определению  $U$  свойства его элементов ( $u = Az$ ) определяются свойствами  $Z$  и заданным оператором  $A$ . Погрешности, вносимые, например, измерениями, неуправляемы, так что возмущенный элемент  $\tilde{u}$  может и не принадлежать  $U$ . В этом случае уравнение  $Az = \tilde{u}$ , с которым приходится иметь дело на практике, попросту не имеет решений и носит чисто условный характер.

2. В обратных задачах оператор  $A$  носит «интегральный» характер. Это значит, что его значения  $Az$  слабо чувствительны к возмущениям величины  $z$ . Поэтому, даже в условиях разрешимости уравнения, малым возмущениям величины  $u$  могут отвечать большие возмущения  $z$ , и при этом характеристика объекта полностью искажается.

В математике [42] дается точное определение свойства оператора, которое назвали здесь его интегральным характером, а такие операторы называются вполне непрерывными или компактными. Если под обратным к  $A$  оператору

ром  $A^{-1}$  понимать совокупность операций для получения  $z$  по заданному  $\tilde{y}$ , то неприменимость классических алгоритмов для поиска приближения на языке функционального анализа означает, что  $A^{-1}$  либо не существует, либо неограничен.

Отметим, что указанное свойство присуще уравнениям, соответствующим задачам интерпретации, а не произвольным операторным. Например, уравнение (1.1) относительно  $x$  (прямая задача) также можно записать в операторной форме:  $A \equiv d^2/d\tau^2$ . Однако такой оператор не «сглаживает», а увеличивает погрешности, и, значит, малым погрешностям  $d^2x/d\tau^2$  могут отвечать лишь малые погрешности  $x$ .

Рассмотренная вначале одна из обратных задач состоит в вычислении производных по заданной функции  $x(\tau)$ , т. е. в вычислении значений дифференциального оператора:  $z \equiv \dot{f}(\tau) = d^2x/d\tau^2 \equiv Ax$ , и ее некорректность была отмечена. Если в задаче (1.1)  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ , то последнюю формулу можно переписать в виде интегрального уравнения типа (1.2) относительно  $z = f(\tau)$  [86]:

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} (\tau - \nu) f(\nu) d\nu,$$

где оператор уже вполне непрерывен.

Вопрос о единственности решения уравнения (1.5) рассматривается только в конкретных постановках и при точных входных данных ( $u \in U$ ). Так, например, в работе [57] доказана единственность решения обратной задачи, подобной (1.4). Доказательство этого факта, если он не следует убедительным образом из физических соображений, — чисто математическая проблема. В задачах интерпретации ее решение имеет принципиальное значение, поскольку это делает осмысленной постановку задачи о поиске приближения к нему при неточных входных данных.

Если уравнение  $Az = \tilde{y}$  носит условный характер, то более естественной является «вариационная» постановка, т. е. переход к задаче о минимизации «расстояния» между  $Az$  и  $\tilde{y}$ . Обозначим через  $\tilde{U}$  множество характеристик наблюдений с учетом возможных погрешностей ( $U \in \tilde{U}$ ). Пусть  $\rho_{\tilde{U}}(u_1, u_2)$  — мера близости элементов (расстояние) в  $U$ , вид которой также зависит от конкретной задачи. Тогда в качестве приближения  $\tilde{z}$  к точному решению уравнения  $Az = u$  (а не к решению  $Az = \tilde{y}$ , которое не существует!) можно искать элемент, на котором достигается точная нижняя грань ( $\inf$  — глубочайший минимум в этом случае) расстояния между  $Az$  и  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{z} = \arg \inf \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{y}), \quad z \in Z. \quad (1.6)$$

В задачах рассматриваемого класса под  $\rho_{\tilde{U}}$  в соответствии с условиями эксперимента понимается осредняющая локальные погрешности среднеквадратичная метрика.

При определенной конкретизации пространства  $\tilde{U}$  и соответственно  $\rho_{\tilde{U}}$  эта постановка соответствует методу наименьших квадратов, однако может быть эффективной (приводить к нужному результату) лишь при определенных ограничениях на  $A$  (опе-

ратор  $A$  не должен быть вполне непрерывным) и  $Z$  (об этом поговорим позже).

Если такие ограничения не выполнены, то задача (1.6) остается некорректной по следующим причинам.

1. Хотя  $\inf \rho_{\vec{z}}$  существует (так как  $\rho \geq 0$ , т. е. ограничена снизу), элемент, на котором достигается точная нижняя грань, может и не существовать в  $Z$ .

2. Если оператор  $A$  — вполне непрерывный, то малым возмущениям  $Az$  и, соответственно,  $\rho$  могут отвечать возмущения  $z$  (а значит, и  $\vec{z}$ ), далекие от точного решения задачи.

В подобных (1.6) классических вариационных постановках могут быть сформулированы и обратные задачи двух других типов, к которым теперь и обратимся.

Учитывая ту роль, которую начинает играть в области дефектоскопии томография, рассмотрим в качестве примера задачу синтеза магнитной системы — томографа [63].

Ограничиваясь простейшей моделью, будем считать, что магнитное поле в аксиально-симметричной (с осью  $z$ ) рабочей зоне  $D$  создается системой  $n$  круговых витков радиусов  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), соосных с  $D$ , расположенных вне этой области в плоскостях  $z = z_k$  и несущих точки  $I_k$ . Магнитное поле такой системы задается явно [63], обозначим его  $\vec{H}(M, \vec{z})$ . Здесь  $M \in D$  и  $\vec{z} \equiv \{r_1, \dots, r_n, z_1, \dots, z_n, I_1, \dots, I_n\}$  — параметр, характеризующий конструкцию.

Требуется так выбрать  $\vec{z}$  (и тем самым конструкцию), чтобы  $\vec{H}$  как можно меньше отличалось от однородного поля  $\vec{H}_0$  априори заданного уровня.

Заметим, что в этой задаче, так же как в задачах интерпретации, определено операторное соотношение между искомой величиной  $\vec{z}$  и эксплуатационной характеристикой  $\vec{H}(M)$  ( $M \in D$ ), а ожидаемое ее значение  $\vec{H}_0$  задано точно. Однако «операторное уравнение», которое в данном случае имело бы вид  $\vec{H}(M_i, \vec{z}) = \vec{H}_0$ ;  $M_i \in D$ ;  $i = 1, 2, \dots, 3n$  при произвольной выборке точек  $M_i$ , заведомо не имеет решений, поскольку магнитное поле конструируемой системы при  $I_k \neq 0$  не может быть в точности однородным в  $D$  ни при каком  $\vec{z}$ . Поэтому естественная математическая постановка задачи определяется требованием  $z = \arg \inf \rho_n(\vec{H}(M, \vec{z}), \vec{H}_0)$ .

Рассмотрим обобщающую постановку. Пусть  $Z$  — метрическое пространство, соответствующее множеству возможных параметров конструкции; метрическое пространство  $U$  — множество возможных эксплуатационных характеристик:  $u = Az$ ,  $z \in Z$ , где  $A$  — заданный явно или неявно оператор, действующий из

$Z$  в  $U$ . Пусть, наконец, метрическое пространство  $\hat{U}$  характеризует множество желаемых эксплуатационных характеристик  $\hat{u}$ , причем  $U \in \hat{U}$ . Тогда искомым элементом  $\bar{z}$  определяется требованием

$$\bar{z} = \{\arg \inf (\rho \hat{v} (Az, \hat{u}))\}, \quad z \in Z, \quad (1.7)$$

где  $Z$  — область определения оператора  $A$ .

В этой постановке  $\rho \hat{v} (Az, \hat{u})$  характеризует качество синтезирующей системы.

Отличие задачи (1.7) от задачи (1.6), несмотря на формальное сходство, состоит прежде всего в том, что метрики ( $\rho$ ) в пространствах  $\hat{U}$  и  $\tilde{U}$  имеют разный смысл. В задачах интерпретации  $\tilde{U}$  — множество наблюдаемых величин, и в этом случае обычно известна в эксперименте осредненная оценка погрешности. Соответственно  $\rho \tilde{v}$  — ее среднеквадратичное отклонение. Например, если  $\tilde{u} =$

$$= \tilde{u}(x), \quad x \in [a, d], \quad \text{то } \rho \tilde{v} (u_1, u_2) = \left\{ \int_a^d (u_1(x) - u_2(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

В задачах синтеза  $\hat{U}$  — множество «идеальных» эксплуатационных характеристик, и осредненная мера отклонения может оказаться недостаточной. Так, в том же примере она нечувствительна к большим локальным возмущениям, которые могут быть недопустимы при эксплуатации. В этих случаях вводится «равномерная» оценка отклонения  $\rho \hat{v} (u_1, u_2) = \max_D |u_1(M) - u_2(M)|$ , если  $D$  — область определения функций  $u = u(M)$ .

В более общей постановке синтезируемая система характеризуется другим «функционалом качества»  $\Phi(z)$ , задаваемым явно или алгоритмически, который не обязан быть метрикой в каком-либо пространстве. Тогда основное требование к системе может быть сформулировано в виде

$$\bar{z} = \{\arg \inf \Phi(z)\}. \quad (1.8)$$

Примером такой постановки могут служить задачи о проектировании оптических фокусирующих систем в качестве элементов измерительных приборов. Для них функционалом качества является угол расхождения пучка лучей на выходе системы  $\theta(z)$ , зависящей от конструктивных параметров [76].

В приведенной выше постановке роль функционала качества играет  $\rho \hat{v} (Az, \hat{u})$ .

Рассмотрим два примера задач управления.

Пусть нагрев некоторой крупногабаритной детали, занимающей в печи область  $D$  с границей  $\Gamma$ , управляется изменением температуры  $v$  внешней среды во времени:  $v(M_\Gamma, \tau) = z(\tau)$ . Требуется так выбрать управляющую функцию  $z(\tau)$ , чтобы к заданному моменту  $T$  температура в  $D$  минимально отличалась от задан-

ного уровня  $\vartheta$ . В этом случае уравнение теплопроводности в  $D$  с заданными начальными и краевыми условиями определяет оператор  $u = Az = v [M, T, z(\tau)]$ , и основное требование к управлению состоит в том, чтобы величина  $\rho_{\tilde{D}}(Az, \vartheta) \equiv \max |v [M, T, z(\tau) - \vartheta|$ , где максимум берется по области  $D$ , имела минимальное значение [23] на множестве возможных управлений.

Другим примером может служить задача об управлении индукционной поверхностной закалкой стальных цилиндрических образцов [69]. В этом процессе за нагревом образца высокочастотными токами Фуко, когда источники теплоты концентрируются вблизи поверхности, следует быстрое его охлаждение с помощью потока жидкости, омывающего поверхность. Обозначим через  $z$  совокупность параметров, управляющих процессами нагрева и быстрого охлаждения (ток в индукторе, время его действия, эквивалент скорости охлаждения и т. п.). Целью закалки будем считать максимальное значение толщины  $d$  закаленного слоя (в котором произошло мартенситное превращение). В этом случае система уравнений теплопроводности и электродинамики наряду с диаграммами фазового состояния стали определяет, хотя и неявно,  $d$  как функционал от  $z$ . Цели закалки соответствует требование

$$z = \arg \inf \frac{1}{d(z)}.$$

Рассмотренные примеры показывают, что основное требование в задаче управления сводится к минимизации некоторого функционала  $\Phi(z)$ , обычно называемого целевым. Поскольку единственность решения априори не предполагается, соответствующее требование имеет вид

$$\tilde{Z} = \{\arg \inf \Phi(z)\}, \quad (1.9)$$

где  $Z$  — множество возможных управлений (обычно некоторое метрическое пространство).

Единственное решение может быть выбрано на основе дополнительных требований.

В частности, как показывает первый пример, может оказаться, что  $\Phi(z) = \rho_{\tilde{D}}(Az, \hat{u})$  при некоторых  $\hat{u}$  и  $A$ .

Нетрудно заметить, что основные требования в задачах синтеза и управления формально тождественны. Различие между этими задачами относится к области приложений (целевым постановкам). Это, однако, определяет и некоторые различия в способах определения  $\Phi(z)$  или  $Az$ : задачи управления обычно связаны с развивающимися во времени процессами, и соответственно указанные величины определяются с помощью эволюционных уравнений.

Так, Л. С. Понтрягиным развита фундаментальная теория

задач управления [19], для которых значения целевого функционала определяются с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные постановки встречаются, например, в задачах химической кинетики [17].

Для задач синтеза  $\Phi(z)$  не обязательно определяется с помощью эволюционных уравнений, хотя такая постановка не исключена [77].

Таким образом, обратная задача любого класса может быть сформулирована как вариационная — задача о минимизации некоторого функционала. Для задач класса интерпретации при точных входных данных такая задача эквивалентна некоторому операторному уравнению.

В рассмотренных классических постановках (1.7)—(1.9) предполагалась единственность минимизирующего элемента  $\tilde{z}$ . Если существует множество таких элементов  $\tilde{Z}_0$ , то ради определенности постановка должна быть уточнена указанием на то, какой именно элемент из  $Z$  надо выбирать.

Однако этим не исчерпывается вопрос о корректности постановки задач синтеза и управления в форме (1.7)—(1.9). Во-первых, как и в задачах интерпретации, нужна уверенность в том, что введенные ограничения на  $z$  гарантируют существование минимизирующего элемента на множество  $Z$ . Во-вторых, в условиях слабой зависимости функционалов качества или целевых функционалов от значительных, быть может, изменений параметра  $z$  нужна уверенность в том, что получаемое приближение окажется приемлемым в практическом отношении. В этом отношении исходные математические постановки (1.7)—(1.9) не отличаются от таковых для задач интерпретации (1.5) и (1.6) и остаются некорректными.

Игнорировать некорректность постановки задачи нельзя. Для ее преодоления имеются два пути: а) корректная постановка обратной задачи того или другого типа, основанная на привлечении дополнительной информации об искомом решении; б) управление классическими алгоритмами решения некорректно поставленных задач.

Оба эти пути анализируются в разработанной главным образом отечественными учеными математической теории регуляризации, приводящей к понятию регуляризирующего алгоритма (РА) или оператора (РО) и многочисленным его реализациям. В этой теории рассматриваются преимущественно задачи типа интерпретации, однако общие ее концепции оказываются эффективными и для других типов обратных задач, наряду с другими достижениями в этой области. Основные результаты теории регуляризации кратко излагаются в следующих разделах первой главы.

## 1.2. О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И ПОНЯТИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

### 1.2.1. Введение задачи в класс корректных (условно-корректная постановка задачи)

Понятие условно-корректной (корректной по Тихонову) постановки задачи, введенное в работе [46], относится к операторному уравнению (1.5) и главным образом к задачам интерпретации. Это понятие является обобщением следующего математического результата, на который впервые в связи с постановкой обратных задач было обращено внимание в 1943 г. [86].

Пусть обратная задача выражена уравнением (1.5):  $Az = u$ ,  $u \in U$ ,  $z \in Z$ , где  $A$  — вполне непрерывный оператор, и пусть при каждом  $u \in U$  уравнение имеет единственное решение. Тогда для устойчивости решения достаточно, чтобы  $Z$  было компактом. Простейшим примером употребляемого здесь понятия компакта (компактного множества) [42] является отрезок числовой прямой, т. е. множество, определяемое неравенствами  $a \leq x \leq b$  и обозначаемое символом  $[a, b]$ . Понятие компакта распространяется на произвольные метрические пространства. Так, на множестве функций одной переменной, определенных на отрезке  $[a, b]$ , компактным является подмножество функций, ограниченных и имеющих ограниченную первую производную (но не множество ограниченных функций!); по своему устройству такое множество не содержит функций с резкими локальными вариациями, что и важно для нашей задачи.

Введение условия компактности в постановку задачи означает практически использование количественной информации об искомом решении. Так, например, если  $z = \vec{p}_n$  —  $n$ -мерный вектор с компонентами  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ( $\vec{p}_n \in E_n$ ) и его уклонение от нуля (норма) определено формулой  $\|z\| = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^2 \right\}^{1/2}$ , то компактным является множество  $\sum_{i=1}^n p_i^2 \leq M$ , где  $M$  — заранее заданное число. Аналогично этому, если  $z = z(x)$  — функция одной переменной  $x \in [a, b]$  с нормой  $\|z\| = \max |z(x)|$ , где максимум (max) берется по отрезку  $[a, b]$ , то компактным оказывается множество функций, удовлетворяющих условиям  $\|z\| \leq M_0$ ,  $\|z_x\| \leq M_1$ , где  $M_0$  и  $M_1$  — заданные числа. В любом случае дело сводится к решению уравнения на множество с некоторыми «априорными» количественными ограничениями на решение.

С другой стороны, теория предполагает, что решение существует и единственно. Существование решения задачи интерпретации (в данном случае при точных данных!) можно рассматривать как естественное следствие правильности принятой мо-

дели  $A$  и наблюдаемости величины  $u$ . Это уже не предмет математического анализа. Напротив, единственность решения должна быть предварительно доказана специальным анализом, зависящим от конкретного вида уравнения, и это чисто математическая задача, решение которой предполагается проведенным.

Обобщение условий теоремы Тихонова дается следующим определением.

Задача о решении операторного уравнения (1.6) называется поставленной корректно по Тихонову (условно-корректной), если: 1) заранее известно, что при любом  $u \in U$  ее решение существует; 2) решение единственно при каждом  $u \in U$ ; 3) достаточно малым возмущениям величины  $u$ , не выводящим возмущенный элемент из  $U$ , отвечают сколь угодно малые возмущения  $z \in Z$ .

Если задача поставлена корректно по Тихонову, то  $Z$  называется множеством корректности, и говорят, что задача введена в класс корректных.

Очевидно, что если операторное уравнение решается в классе корректности, то вариационная задача (1.6) при отсутствии погрешностей ( $\tilde{u} = u$ ), которая может оказаться предпочтительней для построения алгоритма решения, также корректна по Тихонову.

Введенные понятия лежат в основе дальнейшего развития теории, но имеют и прямое отношение к практике построения устойчивых алгоритмов. Рассмотрим следующие три возможные ситуации.

1. Множество корректности вводится искусственно, с помощью априорных количественных ограничений на искомую величину, а множество  $U$  определяется естественным образом, как множество отображений  $Z$  с помощью оператора  $A$  ( $U = AZ$ ). Такая ситуация существует при подборе решения из заданного параметризованного множества ( $z$  приближенно заменяется вектором  $\vec{p} \in E_n$ ). В этом случае решение сводится к вычислению значений  $u = Az$  (значит,  $U \subset AZ$ ) при различных  $z$  и последующему сравнению результата с «наблюдаемой» величиной. Отметим, что практика подбора при решении задач интерпретации послужила стимулом для анализа, но только результаты этого анализа объясняют успех метода подбора при решении конкретных задач и вместе с тем указывают на возможность неудачи подбора. Действительно, компакт должен содержать точное решение, априори неизвестное; с другой стороны, параметризация еще не обеспечивает положительный результат: если, например,  $z = z(x)$  — непрерывная функция, параметризация (с большой размерностью  $n$ ) возможна, но условие  $\|z\|_C \leq M$  не определяет компакта, и, значит, он может быть «плохо обусловлен» требованием  $\|p_n\|_{E_n} \leq M$ . Из теоремы Тихонова следует, что в этом случае параметризацию нужно дополнить ограничением на разности компонент вектора.

2. Чаще на практике встречается ситуация, когда множество  $U$  приходится также вводить искусственным путем. Поскольку при

этом требуется обеспечить существование решения на априори заданном компакте, решается вопрос о том, какими свойствами должно обладать  $U$  для заданного  $Z$ . Этому вопросу посвящено достаточно много теоретических работ (например, [34, 46]). Если ответ на него получен, хотя бы на качественном уровне, то из множества реальных наблюдений  $\tilde{U}$  выделяется подмножество  $U$ , обладающее нужными свойствами. В конкретных задачах при этом решается задача «сглаживания» заданного элемента  $\tilde{y}$ . Если  $u = u(x)$  — некоторая функция, то эта задача может быть решена, например, с помощью «сплайнов» [3]. Однако важно удовлетворить требованию  $u \in U = AZ$ , поэтому наиболее общий подход состоит в том, что на множестве  $U$  выделяется базис  $\{u_k\}$  и искомый элемент задается в виде  $u = \sum_{k=1}^N c_k u_k$ . Коэффициенты  $c_k$  могут быть определены, например, методом наименьших квадратов путем сравнения  $u$  с  $\tilde{y}$  в соответствующей метрике.

Отметим, что применение процедуры сглаживания делает возможным использовать концепцию условно-корректной постановки и в обратных задачах других классов, в постановке типа [2]. В этом случае «идеальный эффект»  $\tilde{y}$  заменяется реально достижимым  $u \in AZ$ , и если соответствующее операторное уравнение имеет единственное решение, можно пытаться решать его на заданном компакте.

3. Сравнительно редки ситуации, когда при искусственном определении  $U$  естественным образом задается компакт  $Z$ . Соответствующий пример связан с задачей закалки цилиндрических образцов, рассмотренной в гл. 3. Это тот случай, когда искомая величина  $z$  — функция одной переменной — оказывается граничным значением решения некоторого уравнения в частных производных на ограниченном пространственно-временном множестве. Тогда принадлежность  $z$  компакт (его «гладкость») гарантируется свойствами решения дифференциального уравнения. Вообще, если такое уравнение является элементом постановки задачи, определяющим оператор  $A$ , задача может автоматически решаться устойчивым образом при соответствующем сглаживании величины  $u$ .

Подобная ситуация встречается чаще в задачах управления, где значения  $A$  обычно определяются дифференциальными уравнениями.

Таким образом, введение задачи в класс корректности может служить одним из методов решения обратных задач. Недостаток этого подхода для практики состоит в том, что для его использования требуется: «удачное» задание априорных количественных ограничений на искомое решение; предварительное решение задачи «сглаживания», согласуемое со свойствами выделенного компакта.

### 1.2.2. Понятие квазирешения

Понятие квазирешения введено В. К. Ивановым [86] в связи с изучением задач интерпретации гравиметрических данных и проблемой автоматизации подбора.

Для задач класса интерпретации оно дается следующим определением.

Пусть решение операторного уравнения (1.5) при точном значении правой части  $\tilde{u} \in U$  принадлежит компакту  $\hat{Z}$  и вместо  $\tilde{u}$  задано приближенное его значение  $\tilde{u} \in \tilde{U}$ ,  $\tilde{U} \supset U$ . Квазирешением операторного уравнения называется элемент  $z_0 \in Z$ , определенный условием

$$z_0 = \arg \inf \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u}), z \in \hat{Z}. \quad (1.10)$$

Нетрудно видеть, что задача о квазирешении совпадает с задачей (1.6) с той разницей, что минимизацию в (1.10) предлагается выполнять на априори заданном компакте, содержащем точное решение операторного уравнения.

Заметим также, что (1.10) можно рассматривать как суперпозицию двух задач: а) найти  $u_0 = \arg \inf_{\tilde{U}} \rho_{\tilde{U}}(u, \tilde{u})$ ,  $u_0 \in U = A\hat{Z}$  (такой элемент  $u_0$  называется, в силу понятной аналогии, проекцией  $\tilde{u}$  на  $AZ$ ); б) решить операторное уравнение  $Az = u$ , на компакте  $\hat{Z}$ . Основываясь на этом, В. К. Иванов доказал, что задача о квазирешении поставлена условно-корректно (в предположении, что точное решение задачи  $\tilde{z} \in \hat{Z}$ ) и, в частности, задача обладает устойчивостью [86].

Практически поиск квазирешения означает использование методов минимизации функционалов (при параметризации  $z$  — функций многих переменных) на множестве с ограничениями. Соответствующие алгоритмы, изложенные, например, в работе [19], реализуются, как правило, на ЭВМ. В случае, если  $\rho_{\tilde{U}}$  — среднеквадратичная метрика в пространстве функций некоторого числа переменных, удобно минимизировать  $\rho_{\tilde{U}}^2$ . Очевидно, что постановка (1.10) распространяет метод наименьших квадратов (для решения операторных уравнений) на случай вполне непрерывных операторов (некорректных задач).

Преимущество постановки (1.10) перед условно-корректной по Тихонову состоит в том, что уже не требуется решать задачу о предварительном сглаживании  $\tilde{u}$ . Эта величина может быть использована в качестве входной информации задачи (1.10), и сглаживание происходит автоматически, поскольку  $Az_0 = u_0 \in A\hat{Z}$ .

Однако задача о квазирешении имеет тот же «недостаток», что и условно-корректная постановка задачи: компакт  $\hat{Z}$  пред-

полагается заданным априорными количественными ограничениями, для чего может потребоваться достаточно детальная информация об искомом решении.

Обращаясь к обратным задачам синтеза или управления, заметим, что для них возможна корректная постановка, близкая к задаче о квазирешении.

Действительно, среди возможных конструкционных или управляющих параметров, как правило, интересуют не все, а только допустимые некоторыми условиями реализации, доступные материалы, реализуемые режимы и т. п. Обозначим через  $\widehat{Z}$  множество всех допустимых параметров. Тогда, если нас устраивает среднеквадратичная оценка уклонения проектируемой характеристики от (эффекта управления) ожидаемой  $\hat{u}$ , задача оптимального проектирования (управления) может быть сформулирована в виде (1.7) с заменой  $Z$  на  $\widehat{Z}$ :

$$z_0 = \arg \inf \rho_{\widehat{Z}}(Az, \hat{u}), z \in \widehat{Z}. \quad (1.11)$$

Если  $\widehat{Z}$  оказывается компактом, что часто бывает при естественных в этих задачах ограничениях и дополнительных предположениях о том, что уравнение  $Az = u$  удовлетворяет прочим условиям теоремы Тихонова (см. п. 1.2.1), а  $\hat{u}$  однозначно проектируется на  $U = A\widehat{Z}$ , то задача синтеза (управления) в форме (1.11) поставлена условно-корректно на  $\widehat{Z}$  и, в частности, обладает единственным решением.

Отметим, что в отличие от задач интерпретации требовать сколь угодно высокой близости  $Az_0$  к  $\hat{u}$  в данном случае нельзя, поскольку  $\hat{u}$  задана «точно» и, вообще говоря,  $\hat{u}$  не принадлежит  $U$ . Вследствие этого  $\rho_{\widehat{Z}}(Az_0, \hat{u}) = \rho_0$  — отличная от нуля величина, являющаяся функционалом от  $\widehat{Z}$ :  $\rho_0 = \rho_0(\widehat{Z})$ . Это обстоятельство учтем в дальнейшем.

В рамках излагаемой ниже более общей концепции регуляризации будут сняты трудности, связанные с количественным определением компакта, а для задач синтеза и управления будет рассмотрен вопрос о выборе элемента из множества минимизирующих, не использующем априорную количественную информацию.

Основные положения, приведенные в следующих пунктах, были развиты в работах [86, 87, 88]. Более детальный их математический анализ можно найти в работе [86].

### 1.2.3. Принцип регуляризации для задач интерпретации

Введем в рассмотрение оценку  $\delta$  погрешности входных данных задачи интерпретации, считая для простоты, что модель  $A$  задана точно:  $\rho_{\widehat{Z}}(\hat{u}, \hat{u}) \leq \delta$ . Пара величин  $(\hat{u}, \delta)$  при неизвестном  $\hat{u}$  обычно является доступной в эксперименте информацией. Если

с экспериментальными данными  $\bar{u}$  сопоставляется величина  $u = Az$  («рассчитанное» влияние объекта), то среди элементов  $z \in Z_\delta$ , где

$$Z_\delta \equiv \{z \in Z: \rho_{\bar{u}}(Az, \bar{u}) \leq \delta\}, \quad (1.12)$$

нельзя предпочесть один другому. Все  $z \in Z_\delta$  оказываются эквивалентными по отношению к заданной входной информации;  $Z_\delta$  естественно назвать множеством практической эквивалентности.

Очевидно, такое положение вещей имеет место как для корректных, так и для некорректных задач (независимо от свойств оператора  $A$ ). В первом случае это не доставляет затруднений: размер  $Z_\delta$  бесконечно мал вместе с  $\delta$ , и потому в качестве приближения может быть выбран любой элемент  $z \in Z_\delta$ . Для некорректных обратных задач типа интерпретации размеры  $Z_\delta$  могут быть сколь угодно большими при любых  $\delta$  и, значит, произвольный выбор  $z \in Z_\delta$  невозможен.

Возникает вопрос о способе выбора приближения из множества практической эквивалентности для задач интерпретации. Естественным является способ выбора по принципу регуляризации, согласно следующему определению.

Будем говорить, что  $z_\delta \in Z_\delta$  выбран по принципу регуляризации, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_Z(z_\delta, \bar{z}) = 0$ , где  $\bar{z}$  — единственное точное решение операторного уравнения  $A\bar{z} = \bar{u}$ . В этом случае  $z_\delta$  называется регуляризованным приближением к решению.

Отметим, что для корректных задач указанное предельное равенство выполняется автоматически (приближение из  $Z_\delta$  ведет себя «регулярно» при  $\delta \rightarrow 0$ ).

#### 1.2.4. Задача о квазиминимизации и регулярирующий алгоритм (оператор) для задач интерпретации

Возникает вопрос о том, как гарантировать указанный выбор, не зная заранее точного решения задачи. Математический анализ, основанный на теореме Тихонова (1.2.1), приводит к выводу, что для этого достаточно обеспечить принадлежность  $z_\delta$  тому же компакту, которому принадлежит точное решение  $\bar{z}$  операторного уравнения. Как показано, это предполагает использование некоторой, например, количественной информации об искомом решении, хотя бы и весьма общего характера.

Пусть  $Z^*$  — компакт и известно, что  $z \in Z^*$ . Тогда естественной является следующая постановка задачи интерпретации на компакте  $Z^*$ :

$$\rho_{\bar{u}}(Az, \bar{u}) \leq \delta, \quad z \in Z^*, \quad (1.13)$$

при известных  $\bar{u}$  и  $\delta$ . Ее естественно назвать задачей о квазиминимизации  $\rho_{\bar{u}}$ .

Всякое решение  $z_0$  такой задачи удовлетворяет принципу регуляризации, а следовательно, является устойчивым приближением к искомому  $\bar{z}$ . Решение заведомо существует, если условиям (1.13) удовлетворяет  $\bar{z}$ . При конечном  $\delta$  решение (1.13) обладает свойством единственности, что, однако, не имеет теперь принципиального значения, как и при решении корректных задач с приближенными данными, где в качестве приближения может быть выбран любой элемент множества практической эквивалентности. Ввиду неединственности решения задачу (1.13) иногда называют [23] обобщенно-корректной.

С практической точки зрения однозначный выбор  $z_0$  разумеется важен, и он осуществляется с помощью того или иного алгоритма. Такой алгоритм (или оператор) называется регуляризирующим для задач интерпретации.

Одним из примеров регуляризирующего алгоритма (РА) может быть любой алгоритм поиска квазирешения (1.10): если  $\bar{z} \in Z^*$ , то  $\rho_0 \equiv \inf_{Z^*} \rho_{\bar{U}}(Az, \bar{y}) \leq \delta$  и поэтому квазирешение  $z_0 \in Z_\delta$ , а не только компакту. Однако существуют и другие РА, как увидим, более экономичные, нежели этот.

Сейчас важно отметить одну принципиальную особенность постановки задачи квазиминимизации в комплексе с поиском квазирешения. В такую постановку входит следующая разнородная информация об изучаемом явлении: а) его физико-математическая модель  $A$ ; б) некоторые общие свойства искомого решения  $Z^*$ ; в) мера погрешности данных наблюдений  $\delta$ . Если эти сведения задаются независимо, то мыслима ситуация, когда  $\rho_0 = \inf_{Z^*} \rho_{\bar{U}}(Az, \bar{y}) \gg \delta$ . Это может случиться, в частности, если свойства решения, например, в виде количественных оценок отражены неудачно, так что  $\bar{z}$  не принадлежит заранее выбранному компактному; то же произойдет в случае, если при заданной точности наблюдений ( $\bar{y}$ ,  $\delta$ ) выбрана слишком грубая модель для описания явлений. В таком случае поставленная задача оказывается, как говорят [86] несостоятельной.

Очевидно, вопрос о состоятельности задачи связан с прогрессом измерительной техники: с повышением точности вычислений можно рассчитывать на восстановление более мелких деталей объекта и законов, управляющих его поведением. Решение этого вопроса не есть предмет собственно математики. В этой связи на уровне корректной постановки математической задачи решающее значение имеет тесный контакт с технологом в целях коррекции указанной выше входной информации.

С другой стороны, если решение на этот счет принято, то алгоритм поиска квазирешения может служить средством проверки состоятельности постановки: если оказывается, что  $\rho_0 > \delta$ , то решение принято неудачно и требуется продолжение дискуссии математики с технологом.

### 1.2.5. О корректных постановках задач других типов

Близкие к (1.13) постановки можно указать для задач синтеза и управления. В задачах этих классов обычно задается «допуск»  $\delta$  отклонения проектируемой конструкции от оптимальной или эффекта управления от ожидаемого. Пусть  $\hat{Z}$  — множество допустимых значений аргумента. Тогда, если функционал качества (целевой) есть  $\rho_{\hat{U}}(Az, \hat{u})$ , приходим к постановке задачи формально аналогичной (1.13):

$$\rho_{\hat{U}}(Az, \hat{u}) \leq \delta, z \in \hat{Z}. \quad (1.14)$$

Это естественно, так как в указанных задачах также ставится вопрос о выборе некоторого (допустимого) элемента из числа удовлетворяющих основному требованию с поправкой на допуск.

Различие между (1.13) и (1.14) состоит в том, что в последнем случае предельный переход  $\delta \rightarrow 0$  не имеет смысла:  $\hat{u}$  — обычно идеальная характеристика явления, и точное равенство  $Az = \hat{u}$  просто невозможно. Существенно, однако, что в этом случае величины  $\hat{u}$ ,  $\delta$ ,  $\hat{Z}$  тем более должны быть согласованы, так как иначе сама постановка (1.14) может оказаться несостоятельной:  $\inf \rho_{\hat{U}}(Az,$

$\hat{u}) > \delta, z \in \hat{Z}$ . Состоятельные постановки вида (1.14), вырабатываемые в контакте технолога с математиком, будем также называть обобщенно корректными для задач синтеза или управления.

Регуляризирующим для этого типа обратных задач назовем любой алгоритм однозначного выбора какого-либо элемента, удовлетворяющего условиям (1.14). В данном случае то, какой именно элемент будет выбран, несущественно, поскольку множество  $\hat{Z}$  включает все требования допустимой (реализуемости) управления или конструкции. Если это не так, задача этого типа остается поставленной некорректно и постановку следует уточнить опять-таки в ходе дискуссии математика с технологом (конструктором).

Отметим, что алгоритм поиска квазирешения в случае состоятельности постановки при заданном допуске пригоден и для решения задачи (1.14).

Рассмотренные постановки основаны на числовой оценке погрешности входных данных в задачах интерпретации или допуска в задачах двух других классов, вводимой в постановку задачи. Обратимся к более общему случаю, характерному для задач синтеза и управления и возможному в задачах интерпретации при учете погрешностей вычислений (неточном задании оператора  $A$ ).

Пусть обратная задача того или иного класса при точных входных данных формулируется как вариационная:  $z^* = \arg \inf \Phi(z) \equiv \arg \Phi^*$ ,  $z \in Z$ , но вместо точного задан приближенный функционал  $\tilde{\Phi}(z)$ . Очевидно, погрешность его  $\delta$  также есть некоторый функционал от  $z$ :

$$|\tilde{\Phi}(z) - \Phi(z)| \leq \delta(z). \quad (1.15)$$

Построим для этого случая множество практической эквивалентности  $Z_\delta$ , считая входной информацией функциональную пару  $(\tilde{\Phi}(z), \delta(z))$ , а также, как это часто бывает, значение  $\Phi^*$ .

Очевидно, что для решения вариационной задачи выполняется неравенство  $|\tilde{\Phi}(z^*) - \Phi^*| \leq \delta(z^*)$ . Поскольку, однако,  $z^*$  — аргумент неизвестного точного функционала, этот элемент нельзя отличить от любого, удовлетворяющего неравенству

$$|\tilde{\Phi}(z) - \Phi^*| \leq \delta(z), \quad z \in Z. \quad (1.16)$$

Множество  $Z_\delta$  значений  $z$ , удовлетворяющих (1.16), естественно назвать множеством практической эквивалентности для рассматриваемого общего случая. Соответственно при известном  $\Phi^*$  и неточных входных данных с известной функциональной оценкой погрешности вариационная задача заменяется задачей о решении системы неравенств:

$$\Phi^* - \delta(z) \leq \tilde{\Phi}(z) \leq \Phi^* + \delta(z), \quad z \in Z. \quad (1.17)$$

Задача эта состоятельна по определению, однако может быть неустойчивой, поскольку малым  $\delta$  соответствуют, вообще говоря, сколь угодно большие вариации  $z$ . Обобщенно корректную постановку получим, заменив в (1.17)  $Z$  на  $\hat{Z} \in Z$  — некоторый компакт, содержащий точное решение или соответственно множество допустимых элементов. Очевидно, рассмотренные ранее вариационные постановки доставляют алгоритмы для решения задачи (1.17).

Рассмотрим в заключение частные случаи множеств практической эквивалентности.

а. Пусть  $\Phi(z) \equiv \rho_U(Az, \bar{u})$  и  $\tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u})$  при точном задании оператора  $A$ . Тогда  $\Phi^* = 0$ ,  $\delta(z) \equiv \delta = \text{const}$  и так как  $\rho_{\tilde{U}} \geq 0$ , приходим к прежнему определению множества практической эквивалентности (1.10).

б. При том же определении  $\Phi(z)$  допустим, что  $\tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}(\tilde{A}z, \tilde{u})$ , где  $\tilde{A}$  — приближенно заданный оператор. Используем понятие нормы элемента (отклонения от нуля), упомянутое выше, и введем погрешность задания оператора формулой  $\|\tilde{A}z - Az\| \leq h \|z\|$ , где  $h = \sup(\|\tilde{A}z - Az\|/ \|z\|)$  [86] — заданная величина ( $\sup$  — обозначение точной верхней грани числового множества). По-прежнему  $\Phi^* = 0$  и  $\tilde{\Phi}(z) \geq 0$ . Но теперь  $\|\tilde{\Phi}(z) - \Phi^*\| \equiv \tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}(\tilde{A}z, \tilde{u}) \leq h \|z\|$ .

в. Достаточно общую оценку погрешности произвольного функционала  $\Phi$  можно получить в ряде случаев, полагая  $\delta(z) = \delta \Psi(z)$ , где  $\Psi(z)$  — заданный функционал, а  $\delta$  — числовой параметр. Отсюда, в частности, следует (б) при  $\Psi \equiv \|z\|$ , но также и случай, когда норма погрешности оператора оценивается по отношению к  $\|z\|^k$ .

Множество практической эквивалентности записывается в виде

$$|\tilde{\Phi}(z) - \Phi^*| \leq \delta \Psi(z).$$

г. Возвращаясь к случаю  $\Phi(z) \equiv \rho_U(Az, \bar{u})$ , положим  $\tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}(\tilde{A}z, \tilde{u})$ , где погрешности  $\tilde{A}$  и  $\tilde{u}$  оцениваются вышеуказанным способом:  $|\tilde{\Phi}(z) - \Phi^*| \equiv \tilde{\Phi}(z) \leq \rho_{\tilde{U}}(\tilde{A}z, \tilde{u}) + \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u}) \leq h \|z\| + \delta$ . Таким образом, можно принять  $\delta(z) \equiv h \|z\| + \delta$ . (При получении этой оценки использовано «неравенство треугольника»  $\rho(u_1, u_2) \leq \rho(u_1, u_3) + \rho(u_3, u_2)$ ). Отметим, что последняя оценка относится и к задачам синтеза (управления), причем  $\delta$  играет роль допуска, а величина  $h$  — погрешности вычисления оператора.

Обратимся к вопросу об использовании качественной информации об искомом приближении в корректных постановках задач.

### 1.2.6. Понятие стабилизатора Тихонова и связанные с ним обобщенно-корректные постановки обратных задач

Как было отмечено, выбор регуляризованного приближения из множества практической эквивалентности достаточно проводить на некотором компакте  $Z^*$ . Это относится ко всем типам задач, поскольку множества допустимых элементов в задачах синтеза и управления обычно компактны:  $\hat{Z} = Z^*$ . Выше были приведены примеры того, каким образом компакт может быть выделен с помощью количественных ограничений типа неравенств на искомый элемент. В частности, в конечно-мерном Евклидовом пространстве  $E_n$  компакт выделяется ограничением на норму элемента:  $\|z\|_{E_n} \leq d$  ( $d > 0$ ). Аналогично этому в других пространствах  $Z$  компактным оказывается подмножество  $\tilde{Z}$  с метрикой, «мажорирующей» (ограничивающей сверху) метрику в  $Z$ :  $\rho_Z(z_1, z_2) \leq \rho_{\tilde{Z}}(z_1, z_2)$  [86].

В соответствии с этим  $Z^*$  может быть задано ограничением на норму в  $\tilde{Z}$ :  $\|z\|_{\tilde{Z}} \leq d$ . Примером может служить множество непрерывных на  $[a, b]$  функций (обозначается  $C[a, b]$ ). Его подмножество ограниченных на  $[a, b]$  функций, как известно [42], не компактно в равномерной метрике:  $\rho_C(z_1, z_2) = \max |z_1(x) - z_2(x)|$ , и, значит, неравенство  $\rho_C(0, z) \equiv \|z\|_C \leq M$  компакта не определяет. Однако подмножество функций, ограниченных вместе с производной (гладких и ограниченных), компактно [86]. Роль нормы на таком подмножестве играет  $\rho_{W_2^1}(0, z) \equiv \|z\|_{W_2^1} = \left\{ \int_a^b (p(x) z^2(x) + q(x) z'^2(x)) dx \right\}^{1/2}$ , если  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq q_0 > 0$ . Известно, что  $\rho_C(0, z) \leq \rho_{W_2^1}(0, z)$ , и нетрудно убедиться, что неравенство  $\|z\|_{W_2^1} \leq M$  обеспечивает принадлежность элемента указанному подмножеству [86]. (В этих формулах  $W_2^1$  — символ пространства Соболева, определяемого именно такой нормой элемента).

Подобно этому на множестве многомерных функций  $z = z(x)$ ,  $x \in D \subset E_n$  ( $n > 1$ ) компакт может быть выделен неравенством, ограничивающим норму в пространстве Соболева  $W_2^p$ :

$$\|z\|_{W_2^p} \equiv \left\{ \int_D \sum_{k=1}^p \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=k} p_{i_1, \dots, i_k}(x) \times \left( \frac{\partial^k z}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leq d,$$

если  $2p \geq n + 1$  [86] и  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}(x) \geq p_{i_1}^0, \dots, p_{i_k}^0 > 0$ .

Для того чтобы выделяемый с помощью указанных неравенств компакт можно было использовать в обобщенно-корректных постановках, необходимо, чтобы ему принадлежало точное решение  $\bar{z}$  (в задачах интерпретации) или чтобы ему принадлежал (в задачах синтеза и управления) любой допустимый элемент  $\hat{z}$ .

Введем следующее фундаментальное определение [86]. Неотрицательный функционал  $\Omega(z)$ , определенный на некотором подмножестве  $\tilde{Z}$  множества  $Z$ , называется стабилизирующим функционалом (стабилизатором) для решения обратной задачи, если: 1)  $\bar{z} \in \tilde{Z}$  ( $\hat{z} \in \tilde{Z}$ ); 2) для всякого числа  $d \geq 0$  множество  $Z_d \subset \tilde{Z}$ , определяемое неравенством  $\Omega(z) \leq d$  является компактным.

Рассмотренные выше нормы являются примерами стабилизаторов, в обобщенно-корректных постановках задач обычно  $\Omega(z) = \|z\|_Z^2$ .

Очевидно, построение конкретных стабилизаторов связано с использованием априорной качественной информации о точном решении (допустимых элементах): «сходство» с элементом конечномерного пространства небольшой размерности ( $\|z\|_{E_n}^2$ ), сходство с функцией определенной степени гладкости ( $\|z\|_{W_2^p}^2$ ) и т. д.

Использование некоторых типов детальной количественной информации о  $\bar{z}(\hat{z})$  позволяет иногда упростить структуру стабилизатора. Так, например, неравенство  $\int_a^b p(x) z^2(x) dx \leq d$  ( $p(x) \geq p_0 > 0$ ) определяет компакт для множества непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию  $z(a) = z_a$  ( $z(b) = z_b$ ), где  $z_a$  и  $z_b$  — заданные числа. Аналогично для множества многомерных функций:  $z = z(x)$ ,  $x \in \Pi \in E_n$ ,  $\Pi \equiv \{x \in E_n : |x_i - x_{i_0}| \leq d_i\}$ , обобщающих непрерывной частной производной указанного ниже типа, компакт выделяется неравенством

$$\int_D p(x) \left( \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \right)^2 dx \leq d,$$

если  $z|_{x_i=x_{i_0}} = z_{i_0}$ , где  $z_{i_0}$  — заданные величины [23]. В приложениях подобная количественная информация бывает естественной [23].

Такого типа стабилизаторы будем называть условными. Явное ограничение на значения стабилизатора (величина  $d$ ) по-прежнему предполагает использование количественной (хотя и «интегральной») информации об искомом решении и лишь незначительно меняет прежние постановки задач.

Существенно другое: введение стабилизатора позволяет формулировать задачу о выборе из множества  $Z_0$  элемента, «наиболее схожего» с точным решением (допустимым элементом) по некоторому качественному признаку.

Пусть в самом деле известно, что искомый элемент принадлежит множеству  $\tilde{Z}$ , на котором определен стабилизатор  $\Omega(z)$ . Тогда можно искать  $z_0$  по условию [86]:

$$z_0 = \arg \inf \Omega(z), \quad z \in Z_0. \quad (1.18)$$

В такой постановке  $z_0$  (если он существует) заведомо при каждом  $\delta$  принадлежит некоторому компактному  $\tilde{Z}$  в силу свойств стабилизатора. Единственность  $z_0$ , вообще говоря, не предполагается и не требуется: единственный элемент определяется выбранным алгоритмом минимизации.

Пусть  $\tilde{Z}$  — подмножество непрерывных функций и  $\Omega(z) = \|z\|_{W_2}^2$ ; тогда задача (1.18) соответствует поиску наиболее

«гладкого» элемента на множестве эквивалентности. Если  $\tilde{Z} \equiv Z = E_n$ ,  $z^{(0)} \in E_n$  задан заранее и  $\Omega(z) = \|z - z^{(0)}\|_{E_n}^2$ , то речь идет о выборе из  $Z_0$  элемента, наименее уклоняющегося от заданного  $z^{(0)}$ . В обоих случаях используется некоторая качественная информация об искомом решении (в частности, такую информацию может нести  $z^{(0)}$ ). Задача (1.18) отличается от предшествующих постановок тем, что в ней используется естественная, обычно имеющаяся, информация об искомом элементе:  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{u}(\tilde{u})$ ,  $\delta$ .

Вопрос о выборе стабилизатора, вообще говоря, также является предметом согласования между математиком и технологом (конструктором).

Для решения задачи (1.18) можно использовать те же методы минимизации на множестве с ограничениями [19], что и для предшествующих вариационных постановок.

В задачах синтеза и управления условие принадлежности решения некоторому компактному множеству может быть, как отмечено выше, составной частью ограничений на допустимые элементы, но не исчерпывать этих ограничений. Соответствующий пример дает простейшая задача о синтезе многослойных покрытий [23, 77] как элемента некоторого интерференционного прибора.

Пусть плоская слоистая система характеризуется вектором  $\vec{p}_s = \{d_1, d_2, \dots, d_s, n_1, n_2, \dots, n_s\}$ , где  $d_i$  — толщины слоев,  $n_i$  — показатели преломления в них. Обозначим  $T = T(\omega, \vec{p})$  энергетический коэффициент пропускания системы, зависящий от частоты  $\omega$  электромагнитной волны ( $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ ) и определяемый алгоритмически по решению краевой задачи для стационар-

ных уравнений электродинамики. Пусть  $\widehat{T}$  — требуемый коэффициент пропускания и  $\delta$  — допуск на уклонение  $T$  от  $\widehat{T}$ :

$$P_\delta \equiv \left\{ \vec{\rho} \in E_{2s}: \rho^2(A\vec{\rho}, \vec{u}) \equiv \int_{\omega_1}^{\omega_2} [T(\omega, \vec{\rho}) - \widehat{T}]^2 d\omega \leq \delta^2 \right\}.$$

Допустимые параметры системы определим условиями: 1)  $d_i \geq 0$ ; 2)  $\inf \sum_{i=1}^s d_i$  (стабильность системы в эксплуатации); 3)  $\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_s\} \in Q \subset E_s$ , где  $Q$  — множество доступных материалов. Нетрудно заметить, что  $\Omega(\vec{d}) \equiv \sum_{i=1}^s d_i$  в силу условия (1) является условным стабилизатором (определяет компакт в силу этих ограничений). Соответственно задача может быть сформулирована в виде

$$\vec{d}_s = \inf \sum_{i=1}^s d_i, \vec{\rho} \in P_\delta, d_i \geq 0, \vec{n} \in Q.$$

Отметим, что в таких задачах требуется еще  $\min s$  (экономичность изготовления) и  $s$  играет роль неаналитического параметра.

На рис. 1.5 представлен коэффициент пропускания многослойной оптической системы, «синтезированной» описанным способом. Синтез проводился с использованием всех двух значений показателей преломления (двух материалов). Приведенный результат отвечает следующим значениям параметров:  $\delta = 10^{-2}$ ,  $s = 11$ ,  $\widehat{T} = 0$  при  $\omega > 10^{14} \cdot \text{лс}^{-1}$  ( $\lambda < 6 \text{ мкм}$ ).

Приведенный пример показывает, что в задачах синтеза и управления возможна «смешанная» постановка задачи, учитывающая и качественную, и количественную информацию об искомом решении:

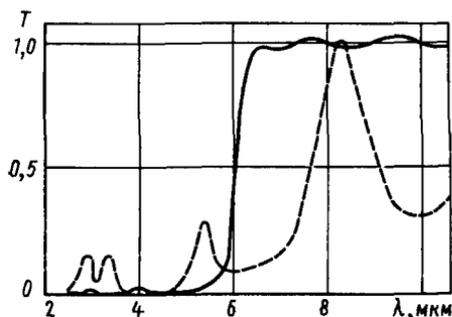
$$\inf \Omega(z), z \in Z_\delta \cap \bar{Z}, \quad (1.19)$$

где  $\bar{Z}$  — множество, определяющее совокупность условий, не учитываемых стабилизатором и задаваемых с помощью явных количественных ограничений.

Отметим, наконец, что в постановках (1.18) и (1.19) для задач синтеза и управления под  $Z_\delta$  можно понимать более общее множество, определяемое условием (1.18).

Рис. 1.5. Коэффициент пропускания:

— найденное значение;  
 - - - начальное приближение



### 1.2.7. Сглаживающий функционал Тихонова и связанные с ним постановки

В работе [86] для задач интерпретации показано, что задача (1.18) о минимизации стабилизатора на множестве с ограничениями типа неравенств может быть редуцирована к классической задаче на условный экстремум с ограничением вида  $\rho_{\tilde{V}}^2(Az, \tilde{u}) = \delta$  (метод Лагранжа). Такая задача, значительно более удобная для численного решения на ЭВМ, формулируется следующим образом. Пусть  $\alpha > 0$  числовой параметр. Выражение

$$F_{\alpha}(z) \equiv \rho_{\tilde{V}}^2(Az, \tilde{u}) + \alpha\Omega(z), \quad z \in \tilde{Z} \quad (1.20)$$

назовем сглаживающим функционалом Тихонова для задачи интерпретации. Рассмотрим задачу

$$z^{\alpha} = \arg \inf F_{\alpha}(z), \quad \rho_{\tilde{V}}^2(Az^{\alpha}, \tilde{u}) = \delta^2, \quad (1.21)$$

где второе условие служит для алгоритмического выбора  $\alpha$ .

Задача (1.21) в самом деле допускает более простой алгоритм решения. Для всякого  $\alpha > 0$  элемент  $z^{\alpha}$  может быть (обычно однозначным образом) найден каким-либо прямым методом безусловной минимизации  $F_{\alpha}$  [19]; уравнение в (1.21) есть обычное трансцендентное уравнение  $\varphi(\alpha) - \delta^2 = 0$  с алгоритмически определенной левой частью, и оно может быть решено любым из известных методов [35] на ЭВМ; определив отсюда  $\alpha = \alpha(\delta)$ , находим и  $z_{\delta} = z^{\alpha(\delta)}$ . Использование указанного уравнения для определения значения параметра  $\alpha(\delta)$  обычно называют методом «невязки» (невязка  $\varphi(\alpha)$ ). Этот метод подробно изучался в работах [23, 56, 86].

Для задач синтеза и управления с точно заданным функционалом качества (целевым) сглаживающий функционал может быть введен аналогично

$$\tilde{F}_{\alpha}(z) = \Phi(z) + \alpha\Omega(z), \quad (1.22)$$

если неравенство  $\Omega(z) \leq C$  при некотором вещественном  $C$  определяет множество допустимых элементов. Если при этом  $\Phi(z) \equiv \rho_{\tilde{V}}^2(Az, \tilde{u})$ , то искомое приближение определяется задачей, аналогичной (1.21) при том же способе согласования параметра  $\alpha$  с мерой допуска  $\delta$ :  $\Phi(z) = \delta^2$ . Подобная постановка для задач синтеза рассматривалась также в работе [77].

В более общем случае, когда функционал в задаче синтеза (управления) задан с погрешностью  $|\tilde{\Phi}(z) - \Phi(z)| \leq \delta(z)$ , следует ввести сглаживающий функционал  $\tilde{F}_{\alpha}(z)$  той же структуры, что и (1.22), с заменой  $\Phi$  на  $\tilde{\Phi}$ . Если минимальное значение точного функционала  $\Phi^*$  заранее известно, то в соответствии с оцен-

ками, приведенными выше, искомая характеристика определяется условиями:

$$z^\alpha = \arg \inf \tilde{F}_d(z), \quad \tilde{\Phi}(z^\alpha) = \Phi^* + \delta(z^\alpha). \quad (1.23)$$

Справедливо следующее утверждение.

Пусть выполнены условия: 1) существует хотя бы одно решение  $\bar{z}$  задачи синтеза (управления) для точного функционала:  $\bar{z} = \arg \inf \Phi(z)$ ,  $\bar{z} \in \tilde{Z} \equiv \{z \in \tilde{Z} : \Omega(\bar{z}) \leq M\}$ , где  $\Omega(z)$  — стабилизатор; 2)  $\delta(z) = \delta\Omega(z)$ . Тогда решение задачи (1.23)  $z^{\alpha(\delta)}$  одновременно принадлежит множествам  $\tilde{Z}$  и практической эквивалентности  $Z_\delta$ .

В самом деле, по определению погрешности для любого  $z \in \tilde{Z}$

$$\Phi(z) - \delta\Omega(z) \leq \tilde{\Phi}(z) + \delta\Omega(z),$$

значит, для любого  $\alpha > 0$

$$F_\alpha(z^\alpha) \leq F_\alpha(\bar{z}) \leq \tilde{\Phi}(\bar{z}) + \alpha\Omega(\bar{z}) \leq \Phi^* + (\alpha + \delta)\Omega(\bar{z})$$

и, с другой стороны,

$$F_\alpha(z^\alpha) = \tilde{\Phi}(z^\alpha) + \alpha\Omega(z^\alpha) = \Phi^* + (\alpha + \delta)\Omega(z^\alpha)$$

в силу выбора  $\alpha$ .

Сопоставляя эти неравенства, имеем:  $\Omega(z^\alpha) \leq \Omega(\bar{z})$ , т. е.  $z^{\alpha(\delta)} \in \tilde{Z}$ . То, что  $z^{\alpha(\delta)} \in Z_\delta$ , следует из его определения.

Установленный факт говорит о том, что постановка (1.23) в самом деле может быть использована для выбора допустимых элементов в задачах синтеза и управления. При этом алгоритм поиска  $z^{\alpha(\delta)}$  ничем не отличается от описанного выше для задач интерпретации.

### 1.2.8. О роли стабилизатора при выборе единственного решения в неопределенных задачах

Рассмотрим пример задачи интерпретации с формально неединственным решением: задачу о прогнозировании параметров плоскостной структуры (модели земной коры, многослойной пленки измерительного прибора и т. п.) с заранее неизвестным числом слоев по данным наблюдений над каким-либо физическим полем на ее поверхности. Это задача интерпретации данных наблюдений. В этом случае в число искоемых параметров входит неаналитический — число слоев  $m$ , определяющий размерность Эвклидова пространства, которому принадлежит вектор «аналитических» параметров  $\vec{p} = \{\xi_1, \dots, \xi_m, q_1, \dots, q_m\}$ , где  $\xi_i$  — координаты границ слоев, а  $q_i$  — их физические характеристики (жесткость, проводимость и т. п.). Если известно, что  $1 < m \leq M$ , то обычно при интерпретации полагают  $m = M$  и затем на основе

приведенных выше постановок формулируют устойчивый алгоритм поиска [23]. Очевидно, что если на самом деле  $m < M$ , то некоторые из величин  $\xi_j$  становятся «фиктивными», разделяющими слои с одной и той же физической характеристикой  $q_{j-1} = q_j$ . Тем самым при точных входных данных  $\xi_j$  могут принимать множество значений из некоторого промежутка.

Отметим, что множество решений обладает следующим свойством: если  $\zeta_i^{(1)}$  и  $\zeta_i^{(2)}$  — решение, то при любом  $\beta$   $\xi_i = \beta \xi_i^{(1)} + (1 - \beta) \zeta_i^{(2)}$  также решение. Такие множества называются «выпуклыми» [43]. В точной формулировке операторное уравнение (1.5), определяющее постановку, имеет вид системы трансцендентных уравнений  $\vec{F}(\vec{p}) = 0$ , где левая часть возможно задается лишь алгоритмически [30, 72]. На точном решении якобиан подобной системы  $\vec{F}'(\vec{p}) = 0$ , и ситуация аналогична задаче о решении системы линейных алгебраических уравнений с вырожденной матрицей [86]. Тем самым формальная неединственность решения порождает в данном случае вычислительную неустойчивость, и естественно пользоваться понятием стабилизатора. Его использование позволяет также выделить однозначно одно из возможных решений.

Рассмотрим в качестве более общей задачи операторное уравнение (1.5), имеющее множество решений  $\tilde{Z}$ , принадлежащее подмножеству  $\tilde{Z}$ , на котором определен стабилизатор  $\Omega(z)$ . Введем следующее определение [86]:  $\bar{z}^{(0)} = \arg \inf \Omega(z)$ ,  $\bar{z} \in Z^*$  называется  $\Omega$  — нормальным решением операторного уравнения.

Будем предполагать, как это обычно бывает, что функционал  $\Omega(z)$  имеет единственный минимизирующий элемент на множестве  $Z^*$ . (Для этого достаточна его сильная выпуклость [86] и выпуклость  $Z^*$  [42]).

При некоторых условиях (очевидных из нижеприведенного рассуждения) для такого стабилизатора справедливо утверждение: решение задачи (1.21) сходится к  $\Omega$  — нормальному решению операторного уравнения (1.5) при  $\delta \rightarrow 0$ :  $\lim p_z(z_\delta, z^{(0)}) = 0$ . Иначе говоря, стабилизатор выделяет из множества  $Z^*$   $\Omega$  — нормальное решение.

В самом деле, решение задачи (1.21) удовлетворяет очевидному неравенству:  $F_\alpha(z^{\alpha(\delta)}) = \delta^2 + \alpha(\delta) \Omega(z^{\alpha(\delta)}) \leq \rho_U^2(Az, \bar{z}) + \alpha(\delta) \Omega(\bar{z}) \leq \delta^2 + \alpha(\delta) \Omega(\bar{z})^*$ , значит, для любого  $\delta > 0$  ( $\alpha(\delta) > 0$ )  $\Omega(z^{\alpha(\delta)}) \leq \Omega(\bar{z})$ . Следовательно: а)  $z^{\alpha(\delta)}$  и  $\bar{z}$  принадлежат одному компактному при любом  $\delta > 0$ , так что существует  $z^*$ :  $\lim_{\delta \rightarrow 0} p_{z^*}(z^{\alpha(\delta)}, z^*) = 0$ ; б) в силу непрерывности  $\Omega(z)$   $\Omega(z^*) \leq \Omega(\bar{z})$ . С другой

стороны, по условию выбора б) и в силу непрерывности оператора  $Ap_{\tilde{U}}(Az^{\alpha(\delta)}, \bar{z}) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Отсюда из а) следует, что  $z^*$  — одно из решений операторного уравнения; из б) следует, что это  $\Omega$  — нормальное решение.

\* В работе [86] доказано, что  $z^{\alpha(\delta)} \in \bar{z}$ .

Установленный факт означает, что при наличии множества точных решений задачи интерпретации задача (1.21) позволяет получить при достаточно малом  $\delta$  сколь угодно хорошее приближение к решению, выбираемому по признаку  $\Omega$ . Для задач синтеза и управления как вариационных возможная неединственность решения не является неожиданностью.

Понятие  $\Omega$ -нормального решения  $\bar{z}^{(0)}$  задачи о минимизации произвольного непрерывного функционала в условиях неединственности [86]  $z^* = \{\arg \inf \Phi(z)\}$  вводится аналогично. Для задач синтеза и управления, состоятельных при любом допуске, в случае, если погрешность функционала (см. п. 1.17) определена формулой  $\delta(z) \equiv \delta\Omega(z)$  ( $\delta > 0$  — числовой параметр), можно утверждать, что решение задачи (1.23) сходится к  $\Omega$ -нормальному решению.

Таким образом, в задачах синтеза (управления) введение стабилизатора и сглаживающего функционала позволяет получить устойчивое приближение к нормальному решению задачи, реализующему оптимальную по признаку  $\Omega$  систему (управление). Можно, в частности, сказать [23], что если  $\Phi(z)$  — функционал качества, то «добавление» стабилизатора способствует улучшению качества проектируемой системы.

Обратимся к вопросам алгоритмики решения обратных задач.

### 1.3. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ (АЛГОРИТМЫ)

#### 1.3.1. Понятие регуляризирующего оператора и их типы

Уточним прежде всего понятие регуляризирующего оператора (алгоритма), использованное в п. 1.2 применительно к корректным постановкам обратных задач. Более общее и более точное определение этого понятия было введено в работе [86] для некорректных задач, включая задачи интерпретации.

Пусть при точных входных данных  $\bar{u} \in U$  некоторая количественная задача имеет единственное решение  $\bar{z} \in Z$  и вместо  $u$  задан приближенный элемент  $\tilde{u}_\delta \in \tilde{U}$  ( $U \subset \tilde{U}$ ), для которого  $\rho_{\tilde{U}}(\tilde{u}_\delta, \bar{u}) \leq \delta$ . Введем определение: оператор  $z_\delta = R(\tilde{u}_\delta, \delta)$  называется регуляризирующим для этой задачи, если: а) он определен при любом  $\tilde{u}_\delta \in \tilde{U}$  и всех  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ , при некотором  $\delta_0$ ; б)  $z_\delta$  удовлетворяет принципу регуляризации (см. п. 1.2.3).

Множество некорректных задач, к которому относится понятие регуляризирующего оператора (РО), естественным образом делится на два подмножества [81]: 1) задачи о вычислении значений операторов (некорректные задачи анализа) и 2) задачи о решении операторных уравнений (некорректные задачи математической физики, включающие и обратные задачи класса интерпретации). Как было отмечено в п. 1.1, оператор предельного пе-

рехода в некоторых аналитических задачах (дифференцирование, аппроксимация интегрального уравнения первого рода), определенный для точных входных данных, теряет смысл, если входная информация неточна. В этих случаях возникает задача о построении РО и вычислении значений этого оператора. Можно заметить, что подобные задачи часто сопутствуют математическому моделированию физических процессов и явлений. Так, одним из способов повышения «чувствительности» данных гравиметрии (наблюдений над гравитационными полями на поверхности Земли) к деталям структур служит предварительная трансформация гравитационных полей с помощью численного дифференцирования [81] (некорректная операция); напротив, в процедуре «сглаживания» тех же полей (см. п. 1.2.1) иногда используются системы ортогональных функций, линейное комбинирование которых (частичные суммы рядов Фурье) также представляет собой некорректную задачу, и т. д.

В свою очередь, если задача о решении операторного уравнения  $Az = \tilde{y}_\delta$  поставлена корректно (например, если это краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения), то в качестве приближения к решению можно принять  $\tilde{z}_\delta = A^{-1}\tilde{y}_\delta$ . Для некорректных задач такого типа, как было показано выше, этого сделать нельзя и построение РО является самостоятельной задачей.

Для обратных задач класса интерпретации их условно-корректная или обобщенно-корректная постановка обычно исчерпывает проблему построения РО, поскольку для таких задач можно применять общие алгоритмы. Так, любой алгоритм  $z_\delta = R(\tilde{y}_\delta, \delta)$  решения вариационных задач (1.10), (1.18), (1.21), как и решения функционального неравенства (1.13), является регуляризирующим по Тихонову. Операторы этого типа будем называть общими регуляризирующими операторами, поскольку они мало связаны со спецификой конкретных задач интерпретации. Именно о таких операторах упоминалось в п. 2.

Альтернативой корректной в том или ином смысле постановки задачи интерпретации является использование классического обращения  $z = A^{-1}u$  как основы для построения регуляризирующего оператора. Дело сводится к тому, что в указанную формулу вводится аналитическая или алгоритмическая «поправка», вследствие чего осуществляется замена  $z = A^{-1}u \Rightarrow z_\delta = R(\tilde{y}, \delta)$ , где  $R$  уже удовлетворяет определению регуляризирующего оператора. Такие регуляризирующие операторы будем называть адаптивными (АРО).

Простейшим примером может служить прерывание предельного перехода по согласованию параметра  $q$ , от которого он зависит, с мерой погрешности  $\delta$ . Так, если классическое решение задачи интерпретации ( $Az = u$ ) выражается через производную неточно заданной функции и эта производная определяется численно, то с  $\delta$  согласуется шаг дифференцирования  $h = h(\delta)$ ; если реше-

ние представляется рядом Фурье, то с  $\delta$  согласуется номер частичной суммы ряда  $n = n(\delta)$  [86], и т. д. Во всех случаях согласование  $q = q(\delta)$  должно быть проведено так, чтобы  $z_{q(\delta)}$  удовлетворял принципу регуляризации; только в этом случае получим РО.

АРО, менее тривиальные, чем в приведенных примерах, формулируются для задач интерпретации, выраженных операторным уравнением  $Az = u$  с линейным оператором  $A$ . Это и понятно: именно для линейных операторов развиты классические алгоритмы обращения. К числу адаптивных относятся, в частности: а) регуляризованный оператор Фурье для задачи об аналитическом продолжении или задачи Адамара [86]; б) алгоритм упрощенной регуляризации [23]; в) для некоторых задач — также метод квазиобращения [23, 49]; г) многие итерационные процессы [80, 86].

Оказывается [2], что свойствами АРО обладают некоторые классические итерационные методы минимизации функционала «невязки»  $\rho^2(Az, \tilde{y}_\delta)$ , если  $A$  — линейный оператор, а именно градиентный метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов и некоторые другие [2]. Это значит, что в случае линейного оператора  $A$  задача

$$\inf \rho^2(Az, \tilde{y}_\delta), \quad z \in Z \quad (1.24)$$

может быть решена без введения компакта с помощью одного из классических итерационных операторов  $z_{n+1} = R(z_n, \tilde{y}_\delta)$  (при заданном  $z_0$ ), если итерационный процесс прервать по согласованию  $n = n(\delta)$ , удовлетворяющему принципу регуляризации.

Отметим, что при построении АРО главным вопросом является согласование параметра с погрешностью входных данных; прерывание не может быть произвольным.

Удобным способом для построения РО является введение вспомогательного параметра  $\alpha > 0$ . С этим мы уже встречались, упомянув оператор минимизации сглаживающего функционала Тихонова, относящийся к числу общих. Среди АРО такой параметр содержат упомянутые выше регуляризованный оператор Фурье, оператор упрощенной регуляризации, оператор квазиобращения. Подобные РО будем называть  $\alpha$ -параметрическими. Понятие  $\alpha$ -параметрического РО дается следующим определением.

Оператор  $z_\alpha = R(\alpha, \tilde{y}_\delta)$  называется регуляризирующим для операторного уравнения (1.5) при неточных входных данных  $\rho_{\tilde{U}}(\tilde{y}_\delta, \tilde{u}) \leq \delta$ , если: а) он определен для любого  $\tilde{y}_\delta \in \tilde{U}$  и всех  $\alpha \gg 0$ ; б) для любого  $\delta$  в промежутке  $0 \leq \delta \leq \delta_0$  при некотором  $\delta_0$  существует функция  $\alpha = \alpha(\delta)$  такая, что  $z_{\alpha(\delta)}$  удовлетворяет принципу регуляризации.

Наряду с рассмотренными типами РО в задачах интерпретации в случае, если их постановка опирается на реальную статистическую информацию о поле наблюдений и поле характеристик объекта, используются также «стохастические» регуляризирую-

щие операторы. Понятие о них можно получить, заменив в данных выше определениях требование сходимости приближения  $z_\delta$  ( $z_\alpha(\delta)$ ) к точному решению по метрике пространства  $L$  требованием сходимости по вероятности или по математическому ожиданию. Такие операторы изучались многими авторами [23].

При моделировании технологических процессов стохастические РО обычно не используются, и на них не будем останавливаться.

### 1.3.2. Регуляризирующие операторы в задачах синтеза и управления

Характерные вариационные постановки обратных задач этих классов (1.7), (1.8) предполагают построение минимизирующих (обычно итерационных) последовательностей, сходящихся либо к единственному, либо к одному из возможных решений. Соответственно задача о квазимиимизации функционала качества (целевого) типа (1.14)  $|\Phi(z) - \Phi^*| \leq \delta \in R$  при заданном допуске  $\delta$  может быть решена выбором из такой минимизирующей последовательности некоторого элемента  $z_n(\delta)$ , первого из удовлетворяющих этому неравенству.

Однако, как было отмечено в п. 1.1, в некорректно поставленных задачах синтеза и управления искомым минимизирующим элементом может отсутствовать; соответственно не всякая минимизирующая последовательность оказывается сходящейся [86]. Введем в этой связи определения.

1. Назовем минимизирующую последовательность  $\{z_k\}$  регулярной в метрике  $Z$ , если: а) она компактна в этой метрике, т. е. из нее можно выделить хотя бы одну подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу  $z$ ; б)  $\{z_k\}$  сходится к единственному минимизирующему элементу либо к одному из них в указанной метрике.

2. Любой способ построения регулярной минимизирующей последовательности назовем регуляризирующим оператором для задач рассматриваемого класса.

Очевидно, что любой алгоритм решения задачи (1.11) является регуляризирующим в указанном смысле оператором. Соответственно если задача о квазимиимизации (1.13) при заданном допуске  $\delta$  и компактном множестве допустимых элементов состоятельна, то для ее решения может быть использован РО задачи (1.11). Отметим, что последний может быть полезен и в случае несостоятельности постановки (1.11): найдя с его помощью  $\inf \Phi(z)$ , можно убедиться в несостоятельности постановки и  $\hat{z}$  прокорректировать ее совместно с технологами.

Таким образом, для решения обратных задач рассматриваемых классов можно использовать РО, сходные по конструкции с опе-

раторами для задач интерпретации, если множество допустимых элементов описывать с помощью некоторого стабилизатора.

В частности, если исходная вариационная задача (1.7) ставится для произвольного функционала  $\Phi(z)$  и известно, что существует непустое множество  $Z^*$  минимизирующих его элементов, то оказывается, что при не слишком прецизионном выборе стабилизатора  $\Omega(z)$  любая последовательность  $\{z^{\alpha_n}\}$  экстремалей сглаживающего функционала  $F_\alpha \equiv \Phi + \alpha\Omega$  при  $\{\alpha_n\} \rightarrow 0$  сходится к  $\Omega$  — нормальному решению задачи о минимизации  $\Phi(z)$ .

В качестве стабилизатора в этом случае следует выбирать  $\Omega = \|z\|_{\tilde{Z}}^2$ , где для характерных для производственных задач пространствах векторов и непрерывных функций норма элемента на соответствующих компактах вводится так же, как в п. 1.2.1. Более общая конструкция связана с математическим обобщением понятия скалярного произведения как функционала, обладающего свойствами скалярного произведения векторов. Для обобщенного скалярного произведения используется обычное обозначение  $(z_1, z_2)$ , а множество, на котором введено скалярное произведение, обычно называется Гильбертовым пространством [42]. В общей конструкции стабилизатора требуется, чтобы  $\|z\|_{\tilde{Z}}^2 \equiv (z_1, z_2)_{\tilde{Z}}$ . Например, на множестве дифференцируемых функций, определенных на  $[a, b]$   $\|z\|_{W_1^2}^2 \equiv \int_a^b (z'^2 + z^2) dx \equiv (z_1, z_2)_{\tilde{Z}}$ , так как обладает общими свойствами скалярного произведения.

При таком выборе стабилизатора утверждение относительно сходимости  $z^{\alpha_n}$  к нормальному решению доказывается по следующей схеме рассуждений.

Для любого  $\alpha > 0$  и любого  $z^* \in Z^*$  справедливы неравенства  $F_\alpha(z) \geq \Phi(z^*) + \alpha\Omega(z) \geq \Phi(z^*)$ ; функционал ограничен снизу и, следовательно, существует минимизирующая последовательность  $\{z_n^\alpha\}$ . Без ограничения общности  $F_\alpha(z_n^\alpha) \geq F_\alpha(z_1^\alpha)$ , т. е.  $\alpha\Omega(z_n^\alpha) \leq F_\alpha(z_1^\alpha) - \Phi(z_n^\alpha) = \Phi(z_1^\alpha) - \Phi(z_n^\alpha) + \alpha\Omega(z_1^\alpha) \leq \Phi(z_1^\alpha) - \Phi(z^*) + \alpha\Omega(z_1^\alpha) \equiv C_\alpha > 0$ . Следовательно,  $\Omega(z_n^\alpha) \leq \alpha^{-1}C_\alpha$ , и потому последовательность  $\{z_n^\alpha\}$  компактна, так что существует минимизирующий элемент  $z^\alpha \in Z$ . В работе [86] установлено также, что в силу выбора стабилизатора  $z^\alpha \in \tilde{Z}$  при любом  $\alpha > 0$ . Пусть  $\{\alpha_m\} \rightarrow 0$  произвольная последовательность. Обозначим  $\hat{z}$   $\Omega$ -нормальное решение задачи минимизации функционала  $\Omega(\hat{z}) = \inf \Omega(z)$ ,  $z \in Z^*$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} F_{\alpha_m}(z^{\alpha_m}) &= \Phi(z^{\alpha_m}) + \alpha_m\Omega_m(z^{\alpha_m}) \leq \\ &\leq \Phi(\hat{z}) + \alpha_m\Omega(\hat{z}) \equiv \Phi^* + \alpha_m\Omega(\hat{z}). \end{aligned}$$

Так как  $\Phi(\alpha_m) - \Phi^* \geq 0$ , то  $\Omega(z^{\alpha_m}) \leq \Omega(\hat{z})$ , так что  $\{z^{\alpha_m}\}$  принадлежит тому же компакту, что и  $\hat{z}$  и соответственно существует предельный при  $\{\alpha_m\} \rightarrow 0$  элемент  $z^0$ . Однако из неравенств  $\Phi^* \leq \Phi(z^{\alpha_m}) \leq \Phi^* + \alpha_m\Omega(\hat{z})$  следует, в силу непрерывности  $\Phi$ , что  $\Phi(z^0) = \Phi^*$ , так что  $z^0 \in Z^*$ . Так как  $\Omega(z^0) = \Omega(\hat{z})$ , то  $z^0$  — нормальное решение задач.

Установлено, таким образом, что алгоритм минимизации сглаживающего функционала на бесконечно малой последователь-

ности  $\{\alpha_n\}$  определяет регуляризирующий оператор для рассматриваемого класса задач.

Очевидно, что такой оператор может служить для выбора допустимого элемента  $z^{\alpha(\delta)}$  для задачи о квазиминимизации при заданном допуске  $\delta$  в случае ее состоятельности.

В работе [86] изучен также вопрос об эффективности рассмотренного оператора в тех случаях, когда функционал  $\Phi(z)$  (а также стабилизатор) задан с некоторой погрешностью.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с реализацией регуляризирующих операторов.

### 1.3.3. Общий регуляризирующий оператор Тихонова

Как показано, некоторые обобщенно-корректные постановки обратных задач при самых общих предположениях относительно оператора  $A$  и искомого решения и независимы от класса задачи связаны с конструкцией сглаживающего функционала Тихонова. Оказывается, что задача о минимизации этого параметрического функционала порождает целое семейство РО, зависящих от выбора параметра.

В частности, для задач интерпретации, выраженных операторным уравнением, существует семейство функций  $\alpha = \alpha(\delta)$ , таких, что экстремаль сглаживающего функционала  $z^{\alpha(\delta)}$  сходится в метрике пространства  $Z$  при  $\delta \rightarrow 0$  к единственному точному решению операторного уравнения.

Если решение соответствующего операторного уравнения не единственно, то для любой из указанных зависимостей  $\alpha = \alpha(\delta)$  имеет место сходимость  $z^{\alpha(\delta)}$  к  $\Omega$ -нормальному решению.

Аналогичные факты установлены в работе [86] для более общей конструкции сглаживающего функционала (1.23) как инструмента для решения некорректно поставленной вариационной задачи. Естественно, что такая конструкция может быть использована и для решения обратных задач синтеза и управления.

Любой алгоритм минимизации сглаживающего функционала, построенного для какой-либо обратной задачи, при заданном значении меры погрешности (или допуска)  $\delta$  и каком-либо выборе зависимости  $\alpha = \alpha(\delta)$ , удовлетворяющей принципу регуляризации (или обеспечивающей принадлежность  $z^{\alpha(\delta)}$  множеству допустимых значений), назовем общим регуляризирующим оператором Тихонова.

Для реализации общего РО Тихонова нужно решить следующие задачи.

1. Сформулировать алгоритм вычисления «прямых» эффектов; для задач интерпретации это  $u = Az$  (расчет невязки  $\rho_{\bar{y}}^2(Az, \bar{y})$  обычно не вызывает затруднений); для обратных задач других классов это функционал качества (целевой), вообще говоря,

более общего вида, чем невязка. Отметим, что расчет прямых эффектов осуществляется многократно в ходе решения обратной задачи и занимает обычно основную долю времени ЭВМ. Ввиду этого следует позаботиться о том, чтобы соответствующий алгоритм был по возможности максимально экономичным.

2. Выбрать стабилизатор, учитывая имеющуюся априорную информацию о решении (см. п. 1.2.5).

3. Следует выбрать способ согласования параметра  $\alpha$  с  $\delta$ :  $\alpha = \alpha(\delta)$  — в соответствии с принципом регуляризации (или его модификацией для задач синтеза и управления).

4. Выбрать стратегию минимизации сглаживающего функционала. Отметим, что в этом отношении РО не отличается от алгоритмов, вытекающих из других корректных вариационных постановок (1.10), (1.13), (1.18) (см. п. 1.2) и связан с использованием известных алгоритмов минимизации; вместе с тем, как показано ниже, структура сглаживающего функционала приводит к достаточно экономичной для ряда задач стратегии.

Поскольку конкретная информация о решении первой из названных задач содержится в последующих главах, а вопрос о выборе стабилизатора рассмотрен выше, остановимся несколько подробнее на возможных способах решения двух последних задач.

Один из способов согласования параметра  $\alpha$  с величиной  $\delta$  по невязке был упомянут в п. 1.2, и он является элементом постановки задачи (1.21). Поскольку задача решается на алгоритмически вводимом множестве корректности, о близости  $z^\alpha(\delta)$  к точному решению можно судить по близости наблюдаемого и рассчитанного эффектов, что и делают при таком выборе регуляризованного приближения. Этот алгоритм является общим для задач всех типов, если для них известна величина  $\delta$ .

Другим возможным способом алгоритмического выбора  $\alpha = \alpha(\delta)$ , преимущественно для задач интерпретации, является «квазиоптимальный» выбор [23, 86]. Он основан на введении характеристики приближения, непосредственно сопоставимой на множестве  $Z$  (или его подмножестве) с величиной отклонения экстремали сглаживающего функционала от точного решения задачи интерпретации  $\|z^\alpha - \bar{z}\|$ . Такой характеристикой служит величина, подобная первому члену тейлоровского разложения  $z^\alpha$  в окрестности  $\bar{z}$ . Собственно тейлоровское разложение построено в работе [31] при точных входных данных, и в этом случае обычно справедливы предельные равенства  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|z^\alpha - \bar{z}\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0}$

$\left\| \alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial \alpha} \right\| = 0$ . Однако при неточных входных данных, вследствие неустойчивости задачи,  $z^\alpha$  может быть сколько угодно далеким от  $\bar{z}$ , так что существует оптимальное значение  $\alpha(\delta)$ , при котором достигается  $\inf_{\alpha} \|z^\alpha - \bar{z}\|$ . Значение  $\alpha$ , при котором достигает точной нижней грани указанная выше характеристика

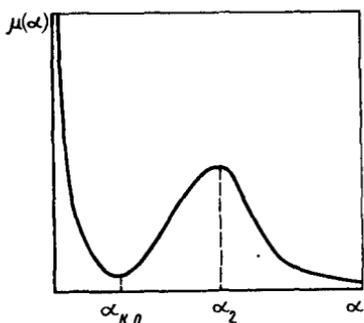


Рис. 1.6. Квазиоптимальная мера приближения

уклонения, не требующая знания  $\bar{z}$ , естественно назвать квазиоптимальным. Более строго соответствующий выбор  $\alpha$  обосновывается следующим образом: квазиоптимальной мерой приближения  $z^\alpha$ , определенной в подпространстве  $Z_1 \subset Z$  (возможно  $Z_1 \equiv Z$ ), называется

$$\mu(\alpha) = \left\| \alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial \alpha} \right\|_{Z_1}. \quad (1.25)$$

Отметим, что  $\mu(\alpha)$  является неявно определенным функционалом от входных данных задачи и тем самым от их погрешности. Обозначим  $\bar{v}$  — совокупность этих данных с совокупной погрешностью  $\sigma$ , тогда  $\mu(\alpha) = \mu(\bar{v}, \alpha)$ . Если  $\bar{v}$  принадлежит известному ансамблю данных  $V$  (в частности, статистическому), то можно рассматривать «расширенную квазиоптимальную меру» [86], понимая под этим величину

$$\mu_V(\alpha) = \sup_{\bar{v}} \mu(\bar{v}, \alpha). \quad (1.26)$$

Математический эксперимент в достаточно широком круге задач [23, 86, 69] и последующий строгий анализ, отчасти статистический, дают представление о характерном поведении  $\mu(\alpha)$  (аналогично  $\mu_V(\alpha)$ ), изображенном при не слишком высоком уровне погрешности  $\sigma$  на рис. 1.6.

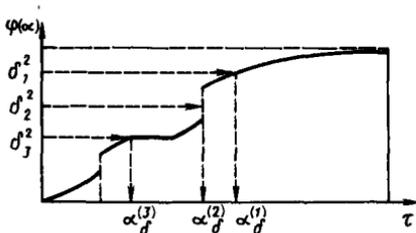
При достаточно естественных предположениях относительно распределения погрешностей отраженное на графике предельное равенство  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(\alpha) = \infty$  справедливо с вероятностью еди-

ница. Отсюда следует, что по крайней мере с вероятностью единица существует достижимый  $\inf \mu(\alpha)$  при  $\alpha \in (0, \alpha_2(\bar{v}))$  (аналогичные заключения верны для  $\mu_V(\alpha)$ ). Следовательно, можно ввести определение: квазиоптимальным значением  $\alpha$  называется  $\alpha_{к.о.}(\sigma) \equiv \arg \inf \mu(\alpha)$  при  $\alpha \in (0, \alpha_1(\bar{v}))$ . Квазиоптимальным значением  $\alpha$  на ансамбле входных данных называется  $\alpha_V(\alpha) = \arg \inf \mu_V(\alpha)$ , где  $\alpha \in (0, \alpha_2)$ ,  $\alpha_2 = \inf \alpha_1(\bar{v})$ ,  $\bar{v} \in V$ . Соответствующие этим значениям  $\alpha$  экстремали  $z^{\alpha_{к.о.}}$ ,  $z^{\alpha_V}$  называют квазиоптимальными приближениями к решению задачи.

Установлено [23], что общий РО Тихонова с квазиоптимальным выбором приближенно является стохастически регуляризующим оператором (1.3.1).

Существуют и другие способы согласования  $\alpha$  и  $\delta$  для задач интерпретации, в частности критерий отношения [23], обосно-

Рис. 1.7. График невязки для нелинейного оператора и схема выбора приближения



ванный также в работе [86] как стохастически регуляризирующий.

При практической реализации общего РО Тихонова каждый из способов выбора определяется алгоритмически. Достаточно проводить минимизацию сглаживающего функционала на последовательности значений  $\{\alpha_s\} \rightarrow 0$  при достаточно большом  $\alpha_0$ ; в этом случае условия выбора (по невязке, квазиоптимального, отношения и т. п.) определяют критерий прерывания указанной последовательности.

При такой дискретизации алгоритмы прерывания по невязке определяются условием

$$\alpha_\delta = \arg \min_{\{\alpha_s\}} |\rho_{\tilde{y}}^2 (Az^{\alpha_s}, \tilde{u}) - \delta^2|, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

В работе [56] установлена строгая монотонность функции  $\varphi(\alpha) \equiv \rho_{\tilde{y}}^2 (Az^\alpha, \tilde{u})$  для линейных операторов  $A$ , и в этом случае существует единственное значение  $\alpha_\delta$ . Если оператор  $A$  нелинеен, то  $\varphi(\alpha)$  может быть не строго монотонной и тогда принципу регуляризации отвечает прерывание по формуле

$$\alpha_\delta = \min_k \alpha_\delta^{(k)}, \quad \alpha_\delta^{(k)} = \arg \min_{\{\alpha_s\}} |\rho_{\tilde{y}}^2 (Az^{\alpha_s}, \tilde{u}) - \delta^2|, \quad (1.28)$$

причем номер  $k$  заведомо принимает конечное число значений [23].

На рис. 1.7 приведена иллюстрация возможности такого выбора для нелинейного оператора в трех случаях: 1) когда уравнение  $\varphi(\alpha) = \delta_1$  имеет единственное решение (отвечающее участку непрерывности  $\varphi(\alpha)$ ); 2) уравнение при  $\delta = \delta_2$  не имеет решения (из-за разрыва  $\varphi(\alpha)$ ); 3) уравнение  $\varphi(\alpha) = \delta_3$  имеет бесконечно много решений (что соответствует разрыву обратной функции).

Если в качестве последовательности  $\{\alpha_s\}$  выбрать убывающую геометрическую прогрессию, то особенно просто записывается квазиоптимальная мера и критерий квазиоптимального прерывания. В этом случае  $(\Delta z)_{\alpha_s} = z^{\alpha_{s+1}} - z^{\alpha_s}$ ,  $(\Delta \alpha)_s = \alpha_s \times (q - 1)$ ,  $q = \text{const} < 1$ ; соответственно  $\mu(\alpha_s) = (1 - q)^{-1} \times \|z^{\alpha_{s+1}} - z^{\alpha_s}\|$  и условие прерывания последовательности

$$\alpha_{\text{кн}} = \arg \min \min_{\{\alpha_s\}} \|z^{\alpha_{s+1}} - z^{\alpha_s}\|. \quad (1.29)$$

Обратимся к вопросу о способах минимизации сглаживающего функционала.

Уже отмечено (см. п. 1.2.5), что при любом  $\alpha > 0$  существует минимизирующий элемент  $z^\alpha$ , принадлежащий некоторому компактному множеству, и, следовательно, задача о его поиске заведомо состоятельна. Специфика этой задачи состоит в том, что искомый элемент (или его приближение, так называемый почти минимизирующий элемент [86]) соответствует точной нижней грани функционала, а не какому-либо из локальных минимумов. Можно указать множество задач, в которых единственный локальный минимум совпадает с точной нижней гранью. Это задача интерпретации с линейным оператором  $A$  прямого соответствия (в этом случае сглаживающий функционал оказывается «строغو выпуклым» [42]). Если  $A$  — нелинейный оператор, то последнее, вообще говоря, неверно, а в задачах синтеза и управления сложная структура функционала, наличие множества локальных минимумов, является обычной ситуацией. Ввиду этого стратегия поиска искомого элемента  $z^\alpha$  должна опираться не на стандартные алгоритмы, а на их комплексы, включающие алгоритмы локальной минимизации. В этом отношении рассматриваемая постановка задачи не отличается от других вариационных [см. (1.10), (1.13) п. 1.2]. Однако параметр сглаживающего функционала  $\alpha$  можно использовать для организации итерационного процесса, определяющего указанный комплекс алгоритмов. Такой процесс, называемый алгоритмом спуска по параметру, описывается следующим образом. Пусть  $R(\alpha, z^0)$  — какой-либо итерационный процесс локальной минимизации сглаживающего функционала  $F_\alpha(z) \equiv \tilde{F}(z) + \alpha\Omega(z)$  при фиксированном  $\alpha$  и начальном приближении  $z^0$ . Зададимся, как и выше, некоторой последовательностью  $\{\alpha_s\} \rightarrow 0$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогда алгоритм спуска по параметру определяется итерационной последовательностью операций:

$$z_{\alpha_{s+1}} = R(\alpha_{s+1}, z_{\alpha_s}), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad z_{\alpha_0} = z^0. \quad (1.30)$$

На рис. 1.8 эта последовательность представлена схематически.

Эффективность такой процедуры может быть понята, исходя из качественных соображений, основанных на том факте, что  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} z^\alpha = \arg \inf \Omega(z)$  [56].

Выберем  $\alpha_0$  достаточно большим. Тогда экстремаль  $z^{\alpha_0}$  попадает в достаточно малую окрестность элемента, минимизирующего стабилизатор. Этот элемент обычно известен (например, при  $\Omega(z) = \|z - z^0\|_2^2$  это  $z^0$ ). Приняв его за начальное прибли-

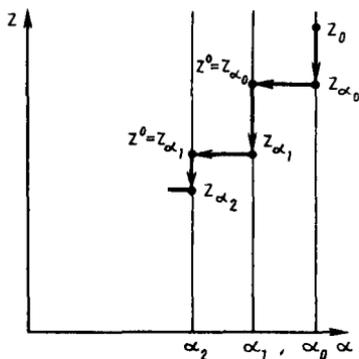


Рис. 1.8. Схема спуска по параметру

жение для итерационного процесса  $R$ , можем рассчитывать на быструю его сходимость к  $z^{\alpha_0}$ . Поскольку «разрядка» между последовательными значениями  $\{\alpha_n\}$  невелика, то, приняв найденный элемент  $z^{\alpha_0}$  за начальное приближение итерационного процесса  $R$  при  $\alpha = \alpha_1$ , оказываемся в ситуации, аналогичной предыдущей, и можем рассчитывать на быструю сходимость  $R$  к  $z^\alpha$  и т. д. до прерывания спуска по тому или иному критерию.

В работе [23] итерационный процесс (1.30) изучался для убывающей геометрической прогрессии значений  $\alpha$ :  $\alpha_{n+1} = q\alpha_n$  для задач интерпретации  $\tilde{\Phi}(z) \equiv \rho_{\tilde{U}}^2(Az, \tilde{u})$ ; показано, что по крайней мере для «слабо нелинейных» в определенном смысле операторов  $A$  существуют значения  $q$ , при которых  $z^{\alpha_0}$  при любом  $s$  оказывается элементом почти минимизирующим сглаживающий функционал. Более детальное изучение итерационных процессов, включая модификации алгоритма спуска по параметру, проведено в работе [80].

Отметим, что из-за возможности организации спуска по параметру сглаживающий функционал Тихонова может оказаться полезным и для решения корректно поставленных вариационных задач и задач о решении операторных уравнений, не обязательно связанных с обратными.

Какой бы комплекс алгоритмов поиска регуляризованного приближения с помощью общего РО Тихонова ни был выбран, необходимым его элементом является алгоритм локальной минимизации  $F_\alpha(z)$  при некотором фиксировании  $\alpha$ . Для этой цели можно воспользоваться общими для всех функционалов способами прямой минимизации, например градиентными [35]. Наряду с этим для задач интерпретации  $\tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}^2(Az, \tilde{u})$  или формально сходных задач других классов  $\tilde{\Phi}(z) = \rho_{\tilde{U}}^2(Az, \tilde{u})$  при известных, не слишком ограничительных условиях, возможны специальные алгоритмы, которые и будут рассмотрены ниже.

Как известно, классические вариационные задачи, рассматриваемые на априорно заданных множествах функций, могут быть сведены, в свою очередь, к некоторому операторному уравнению, так называемому уравнению Эйлера [86]. Для произвольного дифференцируемого функционала [42]  $\Psi(z)$  уравнение Эйлера имеет вид  $\Psi'(z) = 0$ , где  $\Psi'(z)$  — градиент функционала. Аналогична операция и для сглаживающего функционала Тихонова.

Общее выражение градиента сглаживающего функционала с линейным оператором  $A$  и соответственно уравнение Эйлера приведены в работах [23, 86]. При  $\alpha = 0$  такое уравнение совпадает с нормальным для метода наименьших квадратов. В конкретных задачах его можно получить с помощью вариационного метода редукции задач о минимизации функционалов [20].

Для одного из характерных случаев обратной задачи, выраженной интегральным уравнением Фредгольма первого рода  $\int_a^b K(x, \xi) z(\xi) d\xi = u(x)$ ,  $x \in [c, d]$ , уравнение Эйлера, получаемое таким путем, имеет вид

$$\int_a^b \kappa(\eta, \xi) z(\xi) d\xi - \alpha [z''(\eta) - z(\eta)] = b(\eta), \quad (1.31)$$

где  $\kappa(\eta, \xi) = \int_c^d K(x, \eta) K(x, \xi) dx$ ,  $b(\eta) = \int_c^d K(x, \eta) \bar{u}(x) dx$

и используются какие-либо краевые условия, отражающие информацию об искомом решении (например,  $z(a) = z(b) = 0$ ). Уместно заметить сразу же, что переход к уравнению Эйлера связан с дополнительными предположениями о свойствах решения, не следующими из конструкции стабилизатора и соответствующей вариационной задачи.

Если, однако, такие предположения обоснованы, то задача (1.31) (а это характерно и для весьма широкого круга линейных операторных уравнений!) сводится просто к системе линейных алгебраических уравнений, т. е. к стандартной для ЭВМ операции.

Действительно, аппроксимируем интеграл по  $[a, b]$ , например, квадратурной формулой прямоугольников [35] на сетке:  $\xi_i = [i - (1/2)]h$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $h = [(b - a)/n]$ ; вторую производную аппроксимируем формулой согласованной с предыдущей порядка точности:  $z''(\xi_i) \simeq (1/h^2)(z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1})$ ; краевые условия приближенно заменили такими:  $z_0 = -z_1$ ,  $z_{n+1} = -z_n$ . Тогда для сеточной функции  $\{z_i\}$ , аппроксимирующей  $z(\xi)$ , исключая  $z_{-1}$  и  $z_{n+1}$ , из выражения второй производной с помощью граничных условий приходим к системе:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(\alpha) z_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1.32)$$

$$b_i = b(\xi_i), \quad c_{ij} = hK(\eta_i, \xi_j) + \alpha \lambda_{ij};$$

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} 3h^2 - 1 & j = 1 \\ -h^2 & j = 2 \end{array} \right\} i = 1; \\ \left. \begin{array}{ll} -h^2 & j = i - 1 \\ 2h^2 - 1 & j = i \\ -h^2 & j = i + 1 \end{array} \right\} 2 \leq i \leq n - 1; \\ \left. \begin{array}{ll} -h^2 & j = n - 1 \\ 3h^2 - 1 & j = n \end{array} \right\} i = n. \end{cases}$$

Очевидно, элементы  $b_i$ ,  $K(\eta_i, \xi_j)$  могут быть вычислены с помощью стандартных программ для квадратур на ЭВМ и решение задачи действительно сводится к стандартной процедуре. Существенно, что в отличие от примера, рассмотренного в п. 1.1.2, полученная система уравнений хорошо обусловлена при не слишком малых (согласуемых с  $\delta$ ) значениях  $\alpha$ . Поэтому с ее помощью можно получить хорошее приближение. Для того же случая, что и в п. 1.1.2, найденное при  $\alpha = 10^{-2}$  приближение изображено точками на рис. 1.3.

Пусть теперь сглаживающий функционал, соответствующий задачам (1.7), (1.10), содержит нелинейный оператор  $A$ .

Будем считать оператор  $A$  дифференцируемым [42]. Это означает, что для каждого  $z \in Z$  существует линейный относительно  $\zeta$  оператор  $B$ , зависящий от  $z$ , такой, что для любого  $\zeta \in Z$   $A(z + \zeta) = A(z) + B(z)\zeta + o(\|\zeta\|)$ , где  $o(\|\zeta\|)$  — бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с  $\|\zeta\|$ . В этом случае оператор  $B$  называется производной Фреше и обозначается  $B = A'_z$ ; выражение  $A'_z \zeta$  называется дифференциалом Фреше.

В практических задачах дифференциал Фреше может быть вычислен методом возмущений [23] и даже при неявном задании оператора  $A$ .

Если выбрать стабилизатор, как и ранее, с помощью формулы  $\Omega(z) = \|z\|^2 \equiv (z, z)$ , то для поиска  $z^\alpha$  при фиксированном  $\alpha$  оказывается эффективной процедура Ньютона—Гаусса [23].

Указанная процедура приводит к следующему итерационному процессу, основанному на линеаризации оператора  $A$ :

$$z_{n+1} = \arg \inf F_\alpha^{(n)}(z), \quad F_\alpha^{(n)}(z) = \rho_{\bar{U}}^2 + \alpha \Omega(z) \quad (1.33)$$

при некотором заданном  $z^0$ .

В выражении (1.33) функционал  $\rho_{\bar{U}}^2$  может быть представлен в виде  $\rho_{\bar{U}}^2 = \|A(z_n) + A'_z(z_n)(z - z_n) - \bar{y}\|_{\bar{U}}^2 = \|C_n z - \bar{v}_n\|_{\bar{U}}^2 \equiv \rho_{\bar{U}}^2(C_n z, \bar{v}_n)$ , где  $C_n = A'_z(z_n)$  — линейный оператор, а  $\bar{v}_n = \bar{y} - A(z_n) + A'_z(z_n)z_n$ . Таким образом, мы пришли к задаче для уравнения с линейным оператором  $A$ , рассмотренной выше и решаемой теперь в итерационном цикле.

Очевидно, что для получения  $z_{n+1}$  по  $z_n$  можно использовать либо общие алгоритмы минимизации, либо перейти к уравнению Эйлера.

Сходимость процедуры Гаусса—Ньютона (1.33) при  $n \rightarrow \infty$  изучалась, например, в работе [80].

Заметим, что если процесс (1.33) используется в рамках метода спуска по параметру и  $\alpha = \alpha_{a+1}$ , то можно положить  $z^0 = z^{\alpha_a}$ . В ряде случаев [23] оказывается, что при такой стратегии достаточно одной итерации в (1.33) для получения почти минимизирующего элемента.

### 1.3.4. Пример адаптивного регуляризирующего оператора

Из названных в п. 1.3.1 возможных примеров АРО рассмотрим только один: регуляризованный оператор Фурье для задачи о продолжении потенциального поля в сторону порождающих его источников. Такая задача возникает в геофизической гравноразведке [23] при диагностике плазмеевых образований в магнитных ловушках [15] и при плазмотермической или плазмохимико-термической обработке поверхности сплавов на основе железа и др.

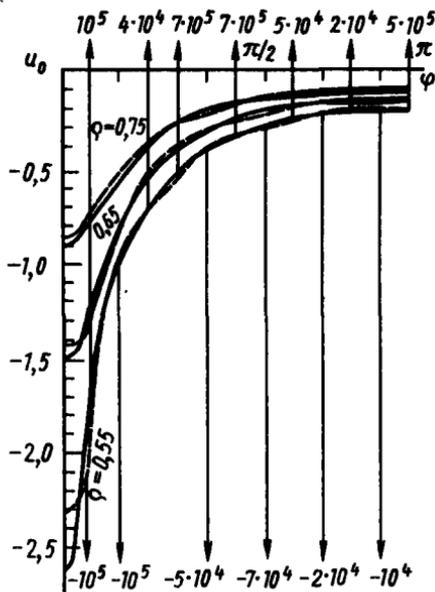


Рис. 1.9. Продолжение потенциала поля в сторону источника:

— — — — — точный потенциал; — — — — — найденный потенциал;  $\langle 10^4 \rangle$  — приближенно без регуляризации ( $\alpha = 0$ )

Последняя из названных задач в рамках простейшей осесимметричной модели формулируется следующим образом: по измерениям магнитного поля на поверхности кругового цилиндра (принимаемого бесконечно протяженным) определить потенциал этого поля на любой коинцентрической с поверхностью окружности, не пересекающей области, занятой плазмой. Считая границу  $r = R$  идеально проводящей, приходим к следующей математической постановке задачи для потенциала магнитного поля  $v$ :

$$\Delta v = 0, \quad r_0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$v(R, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(R, \varphi) = f(\varphi),$$
(1.34)

где  $f(\varphi)$  — заданная с погрешностью нормальная компонента магнитного поля на границе;  $r_0$  — параметр задачи. Требуется определить  $z(\varphi) \equiv v(r_0, \varphi)$  при любом  $r_0$ , для которого уравнение (1.34) еще имеет смысл, как вне области, занятой источниками поля.

Задача (1.34) есть задача Адамера для цилиндра, и сильная неустойчивость делает ее классическим примером некорректной постановки [15]. Тем не менее чисто формальное представление решения можно выписать аналитически в виде ряда Фурье. Считая для простоты функцию  $f(\varphi)$  четной, имеем

$$z(\varphi) \equiv v(r_0, \varphi) = R \left\{ f_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{1}{n} \left( \frac{R}{r} \right)^n \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^n - 1 \right] \cos n\varphi \right\}.$$
(1.35)

Этот ряд сходится лишь в предположении, что функция  $f(\varphi)$  задана точно; в этом случае можно опираться на то, что «наблюдаемое» поле представляется как результат пересчета с уровня  $r = r_0 - \delta$  ( $\delta < r_0$  — малая величина) на уровень  $r = R$ , т. е. как результат решения задачи Дирихле:

$$\Delta w = 0, \quad r_0 - \delta < r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$w(r_0 - \delta, \varphi) = F(\varphi), \quad w(R, \varphi) = 0,$$
(1.36)

и тогда  $f(\varphi) \equiv (\partial w / \partial r)(R, \varphi)$ . Представив решение этой задачи в виде ряда Фурье, нетрудно убедиться, что  $f_n \sim n F_n [(r_0 - \delta)/R]^n$ . Следовательно, при точном задании  $f(\varphi)$  коэффициенты Фурье ряда (1.35) равны по порядку величины  $F_n [1 - (\delta/r_0)]^n$ , так что ряд сходится при достаточном условии, что  $F(\varphi)$  принадлежит пространству функций интегрируемых с квадратом  $L_2 [0, 2\pi]$ . Вместе с тем при неточном задании  $f(\varphi) : f(\varphi) \in L_2 [0, 2\pi]$ , ряд (1.35) с коэффициентами Фурье  $f_n (1/n) (R/r)^n$ , очевидно, расходится при любом  $r < R$  и, следовательно, он не доставляет алгоритма решения задачи.

Эта задача может быть решена с помощью общего РО Тихонова. В самом деле, при любом  $r_0$  и каждой  $z(\varphi) \equiv v(r_0, \varphi)$  задача Дирихле, аналогичная (1.36), с заменой  $r_0 - \delta$  на  $r_0$  определяет  $w(r, \varphi)$ , а следовательно,  $Az \equiv \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R}$ . Таким образом, алгоритмически определены линейный оператор  $A$  и соответственно  $\rho_f^2(Az, f)$ , что позволяет построить сглаживающий функционал Тихонова, используя очевидную информацию о гладкости решения.

Однако более экономичным для этой задачи может оказаться АРО, который имеет следующий вид:

$$z^\alpha(\varphi) \equiv R_\Phi(\alpha, f) = R \left\{ f_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{n} \left( \frac{R}{r} \right)^n \left[ \left( \frac{r_0}{R} \right)^n - 1 \right] \gamma_n(\alpha) \cos n\varphi \right\}. \quad (1.37)$$

$$\text{где } \gamma_n(\alpha) = \left\{ 1 + \alpha \left( \frac{R}{r_0} \right)^{2n} \left[ \left( \frac{r_0}{R} \right)^n - 1 \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Очевидно, при любом  $\alpha > 0$   $R_\Phi(\alpha, f)$  определен, так как благодаря «сглаживающему» множителю  $\gamma_n(\alpha)$  коэффициенты ряда имеют при  $n \rightarrow \infty$  порядок  $(1/n) (r_0/R)^n$ . С другой стороны, можно доказать, что если наблюдаемое поле в задаче (1.34) задается со среднеквадратичной погрешностью  $\delta: \rho_f^2(f, f) \equiv \int_0^{2\pi} (f(\varphi) - \bar{f}(\varphi))^2 d\varphi \leq \delta^2$ , то существует семейство функций  $\alpha = \alpha(\delta)$  таких, что для любого  $r_0$  внутренней границы кольца, где поле гармонично,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |z^{\alpha(\delta)}(\varphi) - z(\varphi)| = 0$ , где  $z(\varphi)$  — решение задачи (1.34) при точных входных данных.

Таким образом,  $R_\Phi(\alpha, f)$  — РО, который естественно назвать регуляризованным рядом Фурье.

Отметим, что выражение (1.37) можно «предугадать», используя формально конструкцию сглаживающего функционала Тихонова. В самом деле, пусть приближение к  $z$  на уровне  $r = r_0$  выражается рядом  $z^\alpha(\varphi) = z_0^\alpha + \sum_{n=1}^N z_n^\alpha(\alpha) \cos n\varphi$ .

Выберем коэффициенты  $\{z_n^\alpha(\alpha)\}$  так, чтобы достигался минимум функционала:  $\Psi_\alpha(\varphi) = \rho^2(Az^\alpha, f) + \alpha \int_0^{2\pi} z'^2(\varphi) d\varphi$ . Здесь  $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\varphi$ ; величину

$Az^\alpha$  также можем представить в виде ряда Фурье, решив аналитически задачу Дирихле (1.36), заменив предварительно в ее условиях  $r_0 - \delta$  на  $r_0$  и  $F(\varphi)$  на  $z^\alpha(\varphi)$ . Тогда

$$Az^\alpha \equiv \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{z_0}{R} \frac{1}{\ln \frac{r_0}{R}} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \frac{r}{R} \left( \frac{r_0}{R} \right)^n \left[ \left( \frac{r_0}{R} \right)^n - 1 \right] \cos n\varphi.$$

Теперь нетрудно убедиться, что в силу ортогональности системы {cos nφ}

$$\Psi_{\alpha}(\varphi) = 2\pi \left( f_0 - \frac{z_0(\alpha)}{R} - \frac{1}{\ln \frac{r_0}{R}} \right)^2 + \\ + \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n - n z_n(\alpha) \left( \frac{r_0}{R} \right)^n \left[ \left( \frac{r_0}{R} \right)^n - 1 \right]^{-1} \right)^2 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z_n^2(\alpha) \right\}.$$

Из условий экстремума  $\partial \Psi_{\alpha} / \partial z_k^{\alpha} = 0$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$  получаем выражения для коэффициентов (1.37). Отметим, что проведенная выкладка не является доказательной, поскольку сходимость соответствующих рядов здесь не исследовалась, и, с другой стороны, добавочный член в функционале  $\Psi_{\alpha}(\varphi)$  не является, вообще говоря, стабилизатором. Тем не менее она несет «эвристическую» нагрузку, доказательство же эффективности алгоритма приведено в работе [15].

На рис. 1.9 представлен потенциал поля точечного источника, помещенного в точку  $r_0^* = 0,55$ ,  $\varphi_0^* = 0$ , по данным задачи (1.34), с помощью регуляризованного оператора Фурье.

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ ДЕТАЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Проблема оптимального управления нагревом стала особенно актуальной в связи с тем, что внедрение высокопроизводительных процессов обработки предъявляет повышенные требования к качеству нагрева [14, 52, 68, 89].

Многие процессы горячей обработки металла (закалка, ковка, штамповка и др.) требуют создания в металлической детали температурного поля заданного уровня, отличающегося от равномерного лишь в пределах некоторого допуска  $\delta$ . Нагрев, приводящий к такому результату, будем называть квазиравномерным, а соответствующее управление — оптимальным.

### 2.1. ЦЕЛЕВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ

В настоящей главе рассмотрим задачу управления нагревом деталей в камерных нагревательных печах. Типичная схема поперечного сечения такой печи представлена на рис. 2.1, где отмечена, в частности, рабочая зона (садка), куда помещаются детали. Управляющим фактором является внешнее температурное поле, возможно зависящее от пространственных координат и времени.

Поскольку любой технологический процесс строго регламентирован во времени, в возможную постановку задачи включается требование получить нужный результат нагрева за определенный промежуток времени (задача А). С другой стороны, с целью увеличения производительности действующего оборудования можно ставить задачу о максимальном сокращении времени нагрева, не за счет его ка-

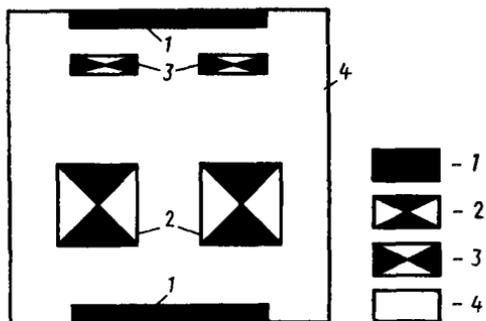


Рис. 2.1. Поперечный разрез нагревательной печи:

1 — нагревательные элементы; 2 — рабочая зона (садка); 3 — вентиляторы; 4 — печное пространство, зона вынужденной конвекции

чества (задача Б). При постановке последней задачи, решение которой неизбежно связано с повышением температуры среды, следует учесть, что при этом возрастает скорость образования окалины, могут произойти необратимые изменения кристаллической структуры и, наконец, оплавление поверхности и сваривание металла. Значит, существует интервал допустимого изменения температуры, включающий заданный уровень  $u$ , и управляющее воздействие не должно выводить внутреннее температурное поле детали за пределы этого интервала, по крайней мере на длительное время.

## 2.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ

### 2.2.1. Фундаментальная постановка задачи управления

Методология математических постановок задач управления восходит к работам Л. С. Понтрягина. Характерной особенностью таких задач является то, что они связаны, как и рассматриваемые в настоящей главе, с эволюционными (развивающимися во времени) процессами. В классической постановке [20] простейшая задача управления формулируется следующим образом.

Пусть процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений;

$$\frac{du}{dt} = F(t, u, z), \quad t \in (t_0, T], \quad u(t_0) = u_0, \quad (2.1)$$

где  $u = (u_1(t), \dots, u_n(t))$  — величины, характеризующие движение объекта в зависимости от времени и называемые его фазовыми координатами:  $t$  — время:  $F = (F_1, \dots, F_n)$  — функции, описывающие внутреннее устройство управляемого объекта и учитывающие различные внешние факторы:  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  — управляющие параметры, выбором которых можно влиять на движение объекта (эти величины также могут быть функциями времени).

Обычно на управляющие параметры накладывается дополнительное условие, выражающее, например, требование реализуемости управления. Математически это условие принадлежности величины некоторому заданному множеству  $u \in U$ . Так, если  $u = u(t)$ , то можно потребовать непрерывности или кусочной непрерывности этой функции.

При определенных, обычно выполненных ограничениях на  $F$  [20] при каждом  $z \in Z$  задача (2.1), называемая задачей Коши, имеет единственное решение  $u_z = u(t, z)$ , зависящее тем самым от  $u$ .

Если цель управления может быть выражена требованием обеспечить минимальное значение некоторого, так называемого целевого функционала  $\Phi(z)$ , определенного на множестве реше-

ний задачи (2.1), то задача управления состоит в том, чтобы выбрать какое-либо значение параметра  $z \in Z$ , удовлетворяющее этому требованию:

$$z = \arg \inf \Phi(z), \quad z \in Z, \quad \Phi(z) \equiv \int (u_z). \quad (2.2)$$

Иначе говоря, классическая задача управления может быть сформулирована как вариационная для функционала  $\Phi(z)$ , значения которого определяются решением задачи Коши (2.1).

Вычислительная задача называется корректно поставленной, если она разрешима и притом однозначно и если решение устойчиво относительно малой вариации входных данных [86].

В этом смысле задача (2.2) может оказаться поставленной некорректно. Правда, неединственность решения не вызывает опасений; по постановке задачи приемлем любой элемент множества  $Z$ , обеспечивающий минимум целевого функционала. Однако для того, чтобы при заданном  $\Phi$  существовал хотя бы один такой элемент и тем более для устойчивости решения, необходимо, чтобы множество  $Z$  обладало определенными свойствами, изучаемыми в функциональном анализе (например, было компактным). Хотя часто условия практической реализуемости управления столь жестки, что соответствующие математические требования следуют из них автоматически, возможная некорректность постановки (2.2) требует повышенного внимания к задаче  $Z$ .

Интересующие нас в настоящей главе задачи отличаются от только что рассмотренной лишь тем, что эволюционный процесс, процесс теплопроводности, описывается в отличие от (2.1) не задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, а некоторой краевой задачей для уравнения в частных производных.

Для высокотемпературных процессов это уравнение нелинейно, и будем считать в дальнейшем теплофизические характеристики материала (теплопроводность  $\lambda$ , теплоемкость  $c$  и плотность  $\gamma$ ) функциями температуры. Тогда если  $D$  — область, занятая нагреваемым телом, и  $\Gamma$  — ее граница, то в простейшей постановке

$$c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u), \quad M \in D, \quad t > 0; \\ u|_{\Gamma} = z(M, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(M). \quad (2.3)$$

Здесь  $z = z(M, t)$  играет роль управляющей функции, состояние системы описывается функцией  $u_z = u(M, t, z)$  и функционал  $\Phi(z)$  выбирается в зависимости от целей управления.

Отметим, что задаче (2.3) можно поставить в соответствие приближенную задачу типа (2.1), используя для этой цели так называемый «метод прямых» [11] приближенного решения уравнений в частных производных. При этом область  $D$  аппроксимируется дискретным набором точек  $\{M_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а функция многих переменных  $u = u(M, t)$  заменяется множеством

функций  $u(t) = \{u(M_i, t)\}$  одной переменной  $t$ : тогда замена дифференциального оператора слева в (2.3) конечно-разностным его аналогом по той или иной разностной схеме [73] приводит к соответствию

$$\frac{1}{c\gamma} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u) \Rightarrow F(t, u),$$

и в данном случае  $F$  не зависит явно от  $z$ .

### 2.2.2. Возможные математические постановки задачи управления квазиравномерным нагревом

Для формулировки задачи А (п. 2.1) введем в качестве целевого функционала

$$\Phi(z) \equiv \rho(u[M, \bar{t}, z], \bar{u}) \equiv \max_D |u[M, \bar{t}, z] - \bar{u}|,$$

где  $\bar{u}$  — температура, до которой требуется нагреть заготовку за данное время  $\bar{t}$ , а  $u[M, \bar{t}, z]$  определяется при каждой  $z (M, \bar{t})$  условиями задачи (2.2).

Пусть  $\delta$  — величина допуска на неравномерность нагрева и  $u^*$  — верхняя граница допустимой температуры.

Тогда задачу А естественно формулировать, с некоторым отличием от классической постановки (2.2), следующим образом:

$$\Phi_1(z) \equiv \rho(u[M, \bar{t}, z], \bar{u}) \leq \delta, \quad (2.4)$$

если  $\max u[M, \bar{t}, z] \leq u^*$  при  $M \in D, t \in (0, \bar{t})$ . Подобная постановка носит название задачи о квазиминимизации целевого функционала [23, 86].

Задачу (2.4) будем считать поставленной корректно, если на заданном множестве допустимых управлений  $z \in Z^*$  существует хотя бы одно ее решение  $z_0$ . Очевидно, необходимым условием корректности постановки является требование

$$\inf \Phi_1(z) \leq \delta, \quad z \in Z^*. \quad (2.5)$$

Это условие не является следствием задачи (2.4), поскольку множество  $Z^*$  и величина  $\delta$  обычно задаются независимо друг от друга, и поэтому условие (2.5) может оказаться не выполненным. В этом последнем случае решение задачи (2.4) на множестве  $Z^*$  заведомо отсутствует и задача становится несостоятельной [86]. В свою очередь, выполнение условия (2.5) недостаточно для существования решения, так как из того, что функционал имеет точную нижнюю грань ( $\inf$ ), еще не следует, что на множестве, где он определен, существует элемент, на котором  $\inf$  достигается [20]. Для этого множество  $Z^*$  должно обладать определенными свойствами (например, быть компактным [42]). Таким образом, вопрос о корректности постановки задачи (2.4) требует специального анализа.

Если задача (2.4) поставлена корректно в указанном выше смысле, то любое ее решение  $z_0$  (единственность которого не обязательна) естественно назвать квазиоптимальным режимом нагрева.

Для формулировки задачи Б о получении нужного эффекта за минимальное время в качестве целевого функционала  $\Phi(z)$  введем величину  $T(z)$  — наименьшее при данном  $z$  время, при котором обеспечивается условие  $\rho(u[M, \varpi, z], \bar{u}) \leq \delta$  без перегрева материала заготовки на временном промежутке  $[0, \varpi]$ . Иначе  $\Phi_2(z) \equiv T(z) = \inf\{\varpi; \varpi \in (0, \infty), \rho(u[M, \varpi, z], \bar{u}) \leq \delta, u(M, t) \leq u^*, M \in D, t \in [0, \varpi]\}$ . Тогда задача Б формулируется следующим образом:

$$z_0 = \arg \inf \Phi_2(z), z \in Z^*, \quad (2.6)$$

где по-прежнему  $Z^*$  — множество допустимых управлений.

Отметим, что в отличие от предшествующей постановки целевой функционал  $\Phi_2(z) = T(z)$  определен в данном случае неявным образом. Если задача (2.6) имеет хотя бы одно решение  $z_0$ , то величину  $T_0 = T(z_0)$  естественно назвать квазиоптимальным временем нагрева.

Условия корректности постановки задачи (2.6) остаются теми же, что и выше. С другой стороны, одним из критериев (необходимым и достаточным условием) разрешаемости задачи (2.4) является очевидное требование  $\bar{t} \geq T_0$ , так что в предшествующей задаче величину  $\bar{t}$  нельзя выбирать произвольным образом.

В приведенных постановках задач управления квазиравномерным нагревом под  $z \equiv z(M_r, t)$  мы понимали температуру внешней по отношению к нагреваемому образцу среды, не исключая ее зависимости от координат точки поверхности  $M_r$  и времени. Такой выбор управляющего параметра позволяет, в частности, оценить возможности различных типов управлений (см. п. 2.2.3). Отметим, что математические постановки задач управления не изменятся, если на поверхности образца задать тепловой

$$\text{поток } z(M_r, t) = \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_r.$$

### 2.2.3. О выборе типа управляющих функций и некоторых простых решениях задачи управления

Будем считать допустимыми управляющие функции, непрерывные по времени. Множество таких функций  $Z^*$  естественно ограничить условием

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(u[M, \varpi, z], \bar{u}) \leq \delta. \quad (2.7)$$

В этом случае заведомо существует  $\bar{t}$ , быть может достаточно большое, при котором задача А имеет решение, а значит, существует и решение задачи Б.

Простейшим типом управления такого рода является постоянная во времени и пространстве температура внешней среды  $z =$

$= \bar{z} = \text{const}$ . Тогда, очевидно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u [M, \varphi, \bar{z}] = \bar{z}$ , и для выполнения условия (2.7) необходимо  $z \in [\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta]$ , где, во избежание перегрева,  $\bar{u} + \delta < u^*$ . Соответствующее множество допустимых управлений обозначим  $Z_1^*$ .

Рассмотрим характерную при нагреве ситуацию, когда начальное распределение температуры заготовки  $\varphi (M)$  (2.3) удовлетворяет условиям  $\beta : \varphi \equiv \sup_D \varphi (M) \leq \bar{u} + \delta, \inf_D \varphi (M) < \bar{u} - \delta$ ; в противном случае либо нагрев не требуется ( $\varphi (M) \in [\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta]$ ), либо требуется охлаждение.

В работе [67] на основании принципа максимума для температурного поля, справедливого и для нелинейных задач вида (2.3), установлены следующие факты.

*Теорема 1.* При условиях  $\beta$  единственным решением задачи Б на множестве  $Z_1^*$ , независимо от формы  $D$  заготовки, является функция  $\bar{z} = \bar{u} + \delta$ . При этом характерное поведение  $\rho (u [M, \bar{z}, t] \bar{u})$  как функции времени  $\rho = I (t)$ , исключающее перегрев, представлено на рис. 2.2. Функция  $I (t)$  непрерывна, монотонно убывает и  $\rho (t) = \delta$  при всех  $t \geq T_0^{(1)}$  при некотором  $T_0^{(1)}$ . Очевидно,  $T_0^{(1)}$  и является оптимальным временем нагрева в этом случае, и есть возможность достаточно просто оценить его. Поскольку эффект не зависит от формы заготовки для решения такой задачи, достаточно иметь номограмму поведения  $I (t)$  в зависимости от  $\phi, \bar{u}$  и  $\delta$ .

Для рассматриваемого множества допустимых управлений та же величина  $z = \bar{z} + \delta = \text{const}$  является и решением задачи А при любом  $t > T_0$ .

Однако получаемые при таком управлении значения времени нагрева могут оказаться слишком большими по сравнению с теми, которые диктуются практическими потребностями. В этом случае возникает вопрос о поиске управления в других классах непрерывных функций, удовлетворяющих условию (2.7), в предположении, что температура окружающей среды является функцией времени, а возможно и координаты.

На первый взгляд может показаться, что экономии времени при нагреве можно добиться за счет организации перепада температур вдоль поверхности заготовки в зависимости от формы последней. Разумеется такая постановка вопроса имеет смысл лишь при термической обработке крупногабаритных заготовок,

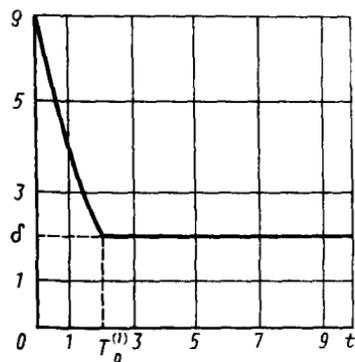


Рис. 2.2. Характерное поведение отклонения  $\rho$  температуры от заданного уровня  $\bar{u}$  при  $z = \bar{u} + \delta$

а не массы мелких деталей. С другой стороны, организация такого нагрева требует специальных конструктивных решений и реализуется значительно сложнее, чем управление температурным полем во времени. Поэтому эффект такого управления должен быть оценен заранее.

В работе [67] это делается с помощью точного анализа модели процесса на основе упомянутого выше принципа максимума.

Расширим множество допустимых функций по сравнению с  $Z_1^*$  предположением о том, что они могут быть кусочно-непрерывными в пространстве:  $z = z(M)$ . При этом для выполнения условия (2.7) необходимо, чтобы функция  $z(M)$  при любых  $M$  принимала значения из промежутка  $[\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta]$ . Множество таких управлений назовем  $Z_2^*$ . Оказывается справедливым следующее утверждение.

*Теорема 2.* Независимо от формы заготовки и начального распределения температур, удовлетворяющего условиям  $\beta$ , оптимальное время квазиравномерного нагрева при управлении из множества  $Z_2^*$  достигается на элементе  $z \equiv \bar{z} = \bar{u} + \delta$ .

Таким образом, организация перепада температур не может дать какого-либо выигрыша по сравнению с управлением с помощью постоянного температурного поля и потому не представляет интереса для практики.

Остается возможность экономизации управления нагревом за счет изменения температуры внешнего поля во времени  $z = z(t)$  с соблюдением условия (2.7). Если при этом  $z(t) \in [\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta]$  все время, то точный анализ [67], подобный предыдущему, вновь приводит к заключению, что оптимальным режимом на соответственно расширенном множестве управлений является статический  $z = \bar{u} + \delta$ .

Следовательно, на экономию можно рассчитывать лишь в том случае, если при выполнении условия (2.7)  $z(t)$  выходит за пределы промежутка  $[\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta]$  на некотором начальном временном интервале  $[0, t^*]$ , так что  $\bar{u} + \delta < z(t) \leq u^*$  при  $t \in [0, t^*]$ . Множество управляющих функций, удовлетворяющих этим требованиям, назовем  $Z_3^*$ .

Реальная возможность получения экономии на множестве  $Z_3^*$  подтверждается следующей предварительной оценкой в рамках достаточно грубой приближенной модели, соответствующей задаче о нагреве балки прямоугольного сечения со сторонами  $\alpha$  и  $\beta$  в поле температур, диапазон варьирования которых допускает пренебрежение зависимостью теплофизических характеристик материала от температуры.

В этом случае температурное поле заготовки определяется линейным уравнением с постоянными коэффициентами с крайевыми условиями на границах прямоугольника  $0 \leq x \leq \alpha$ ,  $0 \leq y \leq \beta$ , а эффект управления зависит от коэффициента температуропроводности  $a^2 = \lambda/c\gamma$ .

Полагая  $\varphi(M) \equiv 0$ , рассмотрим задачу о выборе функции  $z(t)$ , обеспечивающей минимальное в некотором смысле отклонение температурного поля от заданного уровня  $\bar{u}$  в конце заданного временного промежутка  $[0, T]$ . При этом в качестве меры отклонения примем величину  $\rho_T^2 \equiv \iint_D (u[M, T, z(t)] - \bar{u})^2 d\sigma$ ,

которая, ввиду гладкости функции  $u(M, t)$ , удовлетворяющей уравнению теплопроводности, сопоставима по порядку малости с введенной выше мерой равномерной оценки уклонения  $\rho$ : по указанной причине из малости  $\rho_T$  следует и малость  $\rho$ . Управляющие функции будем выбирать из множества:  $z(t) = \{z_1 = \text{const при } 0 \leq t < T/2, z_2 = \text{const при } T/2 \leq t \leq T\}$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — искомые величины.

Температурное поле явно выражается из условий краевой задачи с помощью метода разделения переменных и при  $t = T$  может быть записано в виде

$$u(M, T) = z_1 g_1(M) + z_2 g_2(M), \text{ где } g_1(M) = \int_0^{T/2} K(M, T-t) dt, g_2(M) = \int_{T/2}^T K(M, T-t) dt, \text{ причем } K(M, \tau) = \frac{16}{\pi^3} a^2 \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{v_{n, m}(M)}{(2n+1)(2m+1)} \times \exp(-a^2 \lambda_{n, m} \tau), \text{ где } v_{n, m} = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\alpha} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{\beta}, \lambda_{n, m} = \pi^2 \times \left( \frac{(2n+1)^2}{\alpha^2} + \frac{(2m+1)^2}{\beta^2} \right).$$

Введем обозначения:  $(g_1, g_2) \equiv \int_D g_1(M) g_2(M) d\sigma, \|g_i\|^2 = (g_i, g_i), i = 1, 2$ . Тогда  $\rho_T^2$  может быть выражена формулой  $\rho_T^2 = z_1^2 \|g_1\|^2 + z_2^2 \|g_2\|^2 + 2z_1 z_2 (g_1, g_2) - 2z_1 \bar{u}(g_1, 1) - 2z_2 \bar{u}(g_2, 1)$ , определяющей явную зависимость уклонения от  $z(t)$  на заданном классе управлений. Минимизирующие значения определяются условиями:  $\partial \rho_T^2 / \partial z_1 = 0, \partial \rho_T^2 / \partial z_2 = 0$ , откуда находим

$$z_i = \bar{u} \frac{(g_i, 1) \|g_j\|^2 - (g_1, g_2) (g_j, 1)}{\|g_1\|^2 \|g_2\|^2 - (g_1, g_2)^2}, \quad (i, j = 1, 2, i \neq j). \quad (2.8)$$

Оптимальное значение уклонения, сопоставимое с реальным допуском  $\delta$ , дается следующей формулой:

$$\min \rho_T^2 = \alpha \beta \bar{u}^2 \left\{ 1 - \frac{(g_1, 1) \|g_2\|^2 + (g_2, 1) \|g_1\|^2 - 2(g_1, 1)(g_2, 1)}{\|g_1\|^2 \|g_2\|^2 - (g_1, g_2)^2} (g_1, g_2) \right\}. \quad (2.9)$$

Отметим, что входящие в (2.8) и (2.9) величины также выражаются явно через параметры задачи:

$$\|g_1\|^2 = \alpha \beta \left[ C(2T) + C(T) - 2C\left(\frac{3}{2}T\right) \right];$$

$$(g_1, 1) = \alpha \beta \left[ C\left(\frac{T}{2}\right) - C(T) \right];$$

$$\|g_2\|^2 = \alpha \beta \left[ 1 + C(T) - 2C\left(\frac{1}{2}T\right) \right]; \quad (g_2, 1) = \alpha \beta \left[ 1 - C\left(\frac{T}{2}\right) \right];$$

$$(g_1, g_2) = \alpha \beta \left[ C\left(\frac{T}{2}\right) + C\left(\frac{3}{2}T\right) - 2C(T) \right],$$

$$\text{где } C(\tau) = \frac{64}{\pi^4} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2n+1)^2} \exp(-a^2 \lambda_{n, m} \tau)$$

при любом из записанных выше значений аргумента:  $\tau = T/2, T, (3/2)T, 2T$ .

Рассмотрим множество моделей, для которых безразмерные параметры имеют следующие значения:  $a^2 = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $T = 1$ . Тогда  $C(T/2) = 0,7461$ ;  $C(3T/2) = 0,5822$ ;  $C(T) = 0,6506$ ;  $C(2T) = 0,5271$ . Из формул (2.8), (2.9) получаются следующие оценки:  $z_1 = 6,009\bar{u}$ ,  $z_2 = 0,575\bar{u}$ ,  $\min \rho_T^2 = 0,3995\alpha\beta\bar{u}^2$ .

Аналогичным образом можно убедиться, что при нагреве заготовки той же формы с теми же параметрами в среде с постоянной температурой  $\bar{u}$  оценка неравномерности за то же время  $T$  оказывается равной  $\min \rho_T^2 = 0,5271\alpha\beta\bar{u}^2$ . Следовательно, при варьировании температуры внешней среды во времени при той же продолжительности нагрева действительно можно получить более равномерное поле внутри заготовки. При этом температура внешней среды на начальном временном интервале должна быть выше, чем на последующем.

В дальнейшем будет рассматриваться задача управления квазиравномерным нагревом (КРН) с помощью варьирования температуры печи во времени.

### 2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от целей термической обработки максимальную температуру нагрева можно варьировать в следующих диапазонах:  $200^\circ\text{C} \leq \bar{u} \leq 250^\circ\text{C}$  (низкий отпуск или старение);  $600^\circ\text{C} \leq \bar{u} \leq 800^\circ\text{C}$  (высокий отпуск или низкотемпературная химико-термическая обработка);  $1000^\circ\text{C} \leq \bar{u} \leq 1200^\circ\text{C}$  (нагрев под закалку легированной стали или под штамповку).

Следовательно, с реальным процессом в различных случаях можно идентифицировать как линейную модель теплопроводности, когда физические параметры материала принимаются постоянными на протяжении всего процесса, так и нелинейную модель, для которой будем считать физические параметры зависящими только от температуры.

В дальнейшем будут рассмотрены обе эти модели в задачах управления.

#### 2.3.1. Общая методика решения вариационных задач, связанных с квазиравномерным нагревом

Методы расчета температурного поля при нагреве зависят от характера модели и геометрии области, и они будут рассмотрены в следующих разделах.

Здесь же будем опираться на тот факт, что существование таких методов [20, 82] в любом случае позволяет поставить в соответствие задаче (2.3) программу для вычисления поля  $u[M, t, z]$  как функции точки  $M$  в любой фиксированный момент  $t$  и при любом управлении  $z = z(t)$ .

Рассмотрим при этом условии вопрос о методике решения собственно вариационных задач А и Б в той части, в которой они не зависят от выбора модели.

Оптимальное время  $T_0$  квазиравномерного нагрева КРН (задача Б) можно искать в интервале  $(0, \varphi)$ , где значение  $\varphi$  заранее известно.

В самом деле, как следует из п. 2.2.3,  $\varphi$  может быть найдено предварительным решением задачи о квазиравномерном нагреве заготовки в среде с постоянной температурой:  $z = \bar{u} + \delta$ , где  $\bar{u}$  — требуемый температурный уровень;  $\delta$  — допуск.

Зададимся равномерной сеткой  $\{t_k\}$  значений  $t$  на сегменте  $[0, \varphi]$  и устойчивым алгоритмом решения задания А при каждом  $t_k$ . Как следует из изложенного выше (п. 2.1), при любом  $t_k < \varphi$  добиться квазиравномерного нагрева до уровня  $\bar{u}$  можно лишь за счет локального по времени превышения этого уровня, и такое превышение тем больше, чем меньше  $t_k$ . С другой стороны, ограничив температурное поле сверху, мы можем встретиться при уменьшении  $t_k$  с фактом несостоятельности задачи А, заданный временной интервал  $(0, t_k)$  слишком короток для того, чтобы температурное поле с локальным превышением уровня  $\bar{u}$  успело в достаточной степени выравняться.

Таким образом, выявляется достаточно общий алгоритм решения задачи Б на заданной сетке  $\{t_k\}$ : в качестве приближенного значения  $T_0$  выбирается  $t_{k_0} + \Delta$ , где  $\Delta$  — шаг сетки, а  $t_{k_0}$  — то наименьшее значение  $t_k$ , при котором нарушается одно из двух условий:

$$\rho(u[M, t_{k_0}, z], \bar{u}) \leq \delta \text{ либо } u[M, t, z] \leq u^*$$

при  $M \in D$  и  $t \in [0, t_{k_0}]$ .

Очевидно, значение  $T_0$  может быть получено с достаточной точностью при достаточно мелком шаге  $\Delta$ . При таком подходе устойчивый алгоритм решения задачи А, к которому мы и обращаемся, является составной частью алгоритма решения задачи Б.

Постановка задачи А на заданном сегменте  $[0, \bar{t}]$  (2.4) неудобна тем, что принятая в ней мера уклонения представляет собой недифференцируемый функционал, что связывает в выборе алгоритма его минимизации. Введем в качестве меры уклонения температуры от искомой постоянной  $tu$ , что используется в методе наименьших квадратов (см. также п. 2.1.3):

$$\bar{\rho}_t^2(u[M, \bar{t}, z], \bar{u}) \equiv \iint_D (u[M, \bar{t}, z] - \bar{u})^2 d\sigma,$$

для минимизации которой по  $z$  можно использовать достаточно широкий спектр методов [35, 91], некоторые из которых будут описаны ниже для конкретных моделей. Ввиду гладкости функции  $u(M, t)$  как решения обыкновенного дифференциального уравнения, малость  $\bar{\rho}_t$  влечет за собой малость исходной меры уклонения  $\rho$ . Величина последней всегда может быть оценена для найденного на основе квазимиимизации  $\bar{\rho}$  приближения  $z$ .

Обратимся к вопросу об определении множества допустимых управлений  $Z^*$ . Принято в п. 2.2.3 предположение о том, что

управление есть непрерывная функция времени  $z = z(t)$ , удовлетворяющая условию (2.7), оказывается недостаточным для того, чтобы обеспечить сходимость последовательности таких функций, минимизирующей  $\bar{\rho}$  к некоторому элементу  $z_0$  из  $Z^*$ , который и мог бы быть принят за искомое управление. Естественные требования типа (2.4) накладываются на интегральные, следственные характеристики и также не гарантируют такой сходимости. Вопрос решается построением так называемой регуляризованной минимизирующей последовательности [86], состоящей из функций не только непрерывных, но и гладких. Тогда множество  $Z^*$  оказывается множеством гладких ограниченных функций, определенных на  $[0, \bar{t}]$ .

Алгоритмически регуляризованная минимизирующая последовательность строится из элементов  $z_{\alpha_s}(t)$ , минимизирующих параметрический сглаживающий функционал Тихонова:

$$F_{\alpha}(z) = \rho_{\bar{t}}^2(u[M, \bar{t}, z(t)], \bar{u}) + \alpha \Omega(z),$$

где  $\alpha > 0$  — параметр,  $\Omega(z) \equiv \|z\|_{W_2}^2 = \int_0^{\bar{t}} (z'(t)^2 + z^2(t)) dt$  —

так называемый стабилизатор.

Зададимся некоторой последовательностью  $\{\alpha_s\}$ , монотонно сходящейся к нулю. Для каждого  $\alpha_s$  находим

$$z_{\alpha_s}(t) = \arg \inf F_{\alpha_s}(z). \quad (2.10)$$

Вычисляя каждый раз значение  $\rho_{\alpha_s} \equiv \rho(u[M, \bar{t}, z_{\alpha_s}(t)], \bar{u})$ , останавливаемся на наибольшем из тех значений  $\alpha_s = \alpha_{\delta}$ , для которых  $\rho_{\alpha_s} \leq \delta$ . Если при этом выполняется и второе из условий (2.4) (отсутствие перегрева образца), то  $z_{\alpha_s}(t)$  можно принять в качестве решения задачи управления: в противном случае следует признать, что при заданных  $\bar{t}$  и  $\delta$  поставленная задача не разрешима (несостоятельна). Задача признается несостоятельной и в том случае, когда при любом значении  $s$  оказывается  $\rho_{\alpha_s} > \delta$ .

Рассмотренными процедурами, не связанными со спецификой модели, исчерпывается общая методика поиска временного управления квазиравномерным нагревом.

Вопрос о возможных способах решения задачи (2.10) в большей мере зависит от выбора модели, и он будет рассмотрен в следующих пунктах наряду с другими вопросами алгоритмики.

### 2.3.2. Методика решения задачи для линейного процесса квазиравномерного нагрева

Рассмотрим задачу об оптимальном времени КРН для простейшей пространственно-одномерной модели заготовки, имитирующей широкую плиту толщиной  $2l$ .

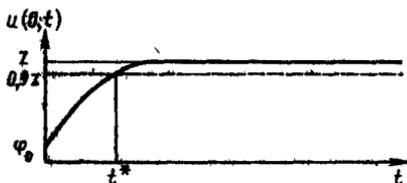


Рис. 2.3. Решение уравнения  $u(0, t) = 0,9z$

Время нагрева в среде постоянной температуры  $\bar{u} + \delta$  для линейного процесса можно оценить, опираясь на аналитическое

представление решения задачи о температурном поле в области  $-l \leq x \leq l$ ,  $t \geq 0$ . Такое решение легко получить [38] методом Фурье (методом разделения переменных):

$$u(x, t) = z + \frac{\Phi_0}{\pi} (z - \Phi_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \times \\ \times \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \exp \left( - \left( \frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2 t \right), \quad (2.11)$$

где  $\Phi_0$  — начальная температура заготовки. Поскольку  $u(x, t)$  асимптотически приближается к  $z$ , мы приняли в качестве оценки времени нагрева то значение  $\varphi$ , при котором температура достигает в среднем сечении ( $x = 0$ ) величины  $0,9z$ .  $\varphi$  получается с помощью численного решения уравнения  $u(0, t) = 0,9z$ , где левая часть определяется формулой (2.11). Поскольку  $u(0, t)$  монотонно растет с ростом  $t$ , последнее уравнение имеет единственный корень (рис. 2.3) и потому легко решается методом половинного деления [35].

Для стали с физическими параметрами плотностью  $\rho = 7,5 \cdot 10^3$  иг/м<sup>3</sup>, удельной теплоемкостью  $c = 0,84$  кДж/(кг·°С), коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 70$  Вт/(м·°С),  $2l = 0,61$  м при  $\Phi_0 = 0^\circ\text{C}$ ,  $z = 250^\circ\text{C}$  значение  $\varphi$  оказалось равным 52 с.

Задача состоит в том, чтобы с помощью временного управления термическим состоянием внешней среды добиться максимального сокращения этого времени.

Будем считать, что управляющим параметром служит тепловой поток на каждой из поверхностей заготовки  $x = \pm l$ , для которого примем прежнее обозначение  $z(t)$ .

В рамках методики, описанной в предшествующем пункте, выбор  $z(t)$  сводится к многократному решению вариационной задачи (2.10).

В силу симметрии источников поля температуру можно рассматривать на полуинтервале  $(0, l)$  при условии  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ , и тогда сглаживающий функционал в (2.10) имеет вид

$$F_\alpha(z) = \int_0^l \{u[x, \bar{t}, z(t)] - \bar{u}\}^2 dx + \alpha \Omega(z) \quad (2.12)$$

с прежним значением  $\Omega(z)$ .

В формуле (2.12)  $u(x, t, z(t))$  имеет явное выражение, которое получается предварительно с помощью метода Фурье из условий следующей задачи теплопроводности:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \bar{t};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = z(t), \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.13)$$

где  $a^2 = \lambda/c\gamma$  — коэффициент температуропроводности.

Чтобы представить решение задачи (2.13) с помощью ряда Фурье, исключим неоднородность из граничных условий, полагая  $u(x, t) = v(x, t) + z(t) \frac{x^2}{2\lambda l}$  [84], и тогда для  $v(x, t)$  имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{x^2}{2\lambda l} z'(t) + \frac{a^2}{\lambda l} z(t) \equiv \bar{f}(x, t);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad v \Big|_{t=0} = -z(0) \frac{x^2}{2\lambda l} \equiv \Phi(x).$$

Можно заметить, что собственными функциями дифференциального пространственного оператора  $a^2 \nabla^2/dx^2$  при заданных однородных граничных условиях являются  $\cos(\pi n/l)x$ ,  $n = 0, 1$ , образующие на сегменте  $[0, l]$  полную ортогональную систему [33]. Следовательно,  $v(x, t)$  можно искать в виде ряда Фурье

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.14)$$

Разложив в ряды Фурье по той же системе источники поля  $\bar{f}(x, t)$  и  $\Phi(x)$  и осуществив подстановку рядов (сходимость которых вместе с производными обеспечивается достаточной гладкостью  $z(t)$ ) в условия задачи для  $v$ , приходим к заключению, что

$$v_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 v_n(t) = \bar{f}_n(t), \quad v_n(0) = \Phi_n,$$

где  $\bar{f}_n(t)$  и  $\Phi_n$  — известные коэффициенты Фурье функций  $\bar{f}(x, t)$  и  $\Phi(x)$  соответственно. Отсюда [18] следует, что

$$v_n(t) = \Phi_n \exp\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right) + \int_0^t \bar{f}_n(\tau) \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t - \tau)\right) d\tau. \quad (2.15)$$

Нетрудно подсчитать, что для выбранной ортогональной системы

$$\varphi_n = z(0) \begin{cases} -\frac{l}{6\lambda}, & n = 0 \\ (-1)^{n+1} \frac{2l}{\lambda (\pi n)^2}, & n \neq 0 \end{cases} \equiv z(0) \hat{\varphi}_n; \quad (2.16)$$

$$\hat{f}_n(\vartheta) = \begin{cases} -\frac{l}{6\lambda} z'(\vartheta) + \frac{a^2}{\lambda l} z(\vartheta), & n = 0; \\ (-1)^{n+1} \frac{2l}{\lambda (\pi n)^2} z'(\vartheta) \equiv z'(\vartheta) \hat{f}_n, & n \neq 0. \end{cases}$$

Если подставить выражения (2.15) и (2.16) в разложение (2.14) и провести несложные преобразования, связанные с интегрированием по частям функций, содержащих  $z'(\vartheta)$ , с учетом тождеств

$\hat{f}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n(t) \cos \frac{\pi n}{l} x$ ,  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} x$ , то приходим к следующей формуле для  $u(x, \bar{t})$  в произвольный фиксированный момент времени  $\bar{t}$ :

$$u(x, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} G(x, \bar{t} - \vartheta) z(\vartheta) d\vartheta,$$

$$G(x, \bar{t} - \vartheta) \equiv \frac{a^2}{\lambda l} - \frac{d}{d\tau} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n \exp \left( - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 (\bar{t} - \vartheta) \right) \cos \frac{\pi n}{l} x \right]. \quad (2.17)$$

Это и есть искомое аналитическое выражение для  $u(x, \bar{t}, z(t))$ . Здесь мы намеренно сохраняем символ производной по  $\vartheta$ , так как почленное дифференцирование ряда возможно лишь при  $\vartheta \neq \bar{t}$ ; в последнем случае производная относится к сумме ряда и определяется в этой точке численным дифференцированием.

При любом фиксированном значении  $\alpha$  вариационную задачу (2.12) можно решать с помощью методов, так или иначе использующих градиент функционала, который в данном случае также выписывается аналитически. При любом значении  $\bar{z}(\bar{t})$  он получается из линейной части вариации  $F_\alpha(z)$  при подстановке  $z(t) = \bar{z}(t) + \xi(t)$ , если  $z(t)$  и  $\bar{z}(t)$  принадлежат одному и тому же классу [20]. Мы определим этот класс, наряду с условиями достаточной гладкости, следующими краевыми условиями:  $z'(0) = 0$  и  $z(\bar{t}) = 0$ , из которых последнее соответствует требованию прерывания теплового потока в конечный момент времени.

Очевидно,

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha}(\bar{z} + \xi) = & \int_0^1 \left\{ \int_0^{\bar{t}} G \bar{z} d\tau - \bar{u} + \int_0^{\bar{t}} G \xi d\tau \right\}^2 + \\
 & + \alpha \int_0^{\bar{t}} [(\bar{z}' + \xi')^2 + (\bar{z} + \xi)^2] d\tau = F_{\alpha}(\bar{z}) + \\
 & + 2 \int_0^{\bar{t}} \xi(\tau') \left\{ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} G(x, \bar{t} - \tau) G(x, \bar{t} - \tau') dx \bar{z}(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \int_0^{\bar{t}} G(x, \bar{t} - \tau') \bar{u} dx \right\} d\tau' + 2\alpha \left\{ \xi z' \Big|_0^{\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} (\bar{z} - \bar{z}') \xi(\tau') d\tau' \right\} + \\
 & + f_{\alpha}(\bar{z}, \xi),
 \end{aligned}$$

где в силу граничных условий интегральная подстановка  $\xi \bar{z}' \Big|_0^{\bar{t}} = 0$ , а  $f_{\alpha}(\bar{z}, \xi)$  — нелинейная относительно  $\xi$  часть вариации, имеющая более высокий порядок малости  $f_{\alpha}(\bar{z}, \xi) = O(\|\xi\|^2)$ .

С точностью до величин первого порядка малости вариацию функционала можно записать в виде

$$F_{\alpha}(\bar{z} + \xi) - F_{\alpha}(\bar{z}) \cong \int_0^{\bar{t}} g(\tau', \bar{z}(\tau')) \xi(\tau') d\tau' \equiv (g, \xi),$$

где по определению [42] оператор  $g$  и есть градиент функционала.

Таким образом,

$$g(\tau', \bar{z}(\tau')) \equiv 2 \left\{ \int_0^{\bar{t}} \kappa(\tau', \tau) \bar{z}(\tau) d\tau - b(\tau') + \alpha [\bar{z}(\tau') - \bar{z}'(\tau')] \right\} \quad (2.18)$$

при условиях  $\bar{z}'(0) = 0$ ,  $\bar{z}(\bar{t}) = 0$ , где

$$\begin{aligned}
 \kappa(\tau', \tau) &= \int_0^{\bar{t}} G(x, \bar{t} - \tau) G(x, \bar{t} - \tau') dx, \\
 b(\tau') &= \int_0^{\bar{t}} G(x, \bar{t} - \tau') \bar{u} dx.
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Наиболее экономичными в условиях существования градиента методами минимизации функционала относительно  $\bar{z}$  являются два следующих:

1) метод сопряженных градиентов [20], представляющий собой итерационный процесс, каждый шаг которого, за исключением первого, определяется значениями градиента на двух предшествующих итерациях (первый шаг делается с помощью градиентного спуска):

2) метод уравнения Эйлера, согласно которому вариационная задача заменяется уравнением

$$g(\mathbf{v}', \tilde{z}(\mathbf{v}')) = 0, \quad \tilde{z}'(0) = 0, \quad \tilde{z}(\bar{t}) = 0, \quad (2.20)$$

в данном случае интегродифференциальным. Такая возможность следует из того, что для рассматриваемого сглаживающего функционала, обладающего свойством «строгой выпуклости» [42], единственная точка минимума  $z_\alpha(t)$  совпадает с корнем градиента.

Для практической реализации каждого из этих методов на ЭВМ задача «дискретизируется». Искомой функции ставится в соответствие вектор  $\tilde{z}(t) \Rightarrow \{z_i = z(t_i)\}$ , где  $\{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — некоторая сетка значений на  $[0, \bar{t}]$ , обычно равномерная ( $t_i - t_{i-1} = \Delta t = \text{const}$ ). Интегралы заменяются конечными суммами, а производные — разностными отношениями.

Так, например, дискретным аналогом уравнения Эйлера (2.18)—(2.20) может служить следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$h \sum_{l=1}^m \kappa_{ij} z_l + \alpha \left( z_i - \frac{1}{h^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) \right) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.21)$$

Здесь  $h$  — шаг равномерной сетки, выбранной таким образом, что ее крайний левый узел  $t_1$  сдвинут на полшага вправо относительно левого конца сегмента  $t = 0$ , а ее крайний правый узел  $t_m$  сдвинут относительно правого конца  $t = \bar{t}$  влево на ту же величину. Вследствие этого в уравнениях для  $i = 1$  и  $i = m$  значения  $z_0$  и  $z_{m+1}$ , соответствующие фиктивным точкам  $t_0 = -(h/2)$  и  $t_{m+1} = \bar{t} + (h/2)$ , исключаются в силу краевых условий, аппроксимированных со вторым порядком точности следующим образом:

$$z'(0) \cong \frac{z_1 - z_0}{h} = 0, \quad z(\bar{t}) \cong \frac{1}{2} (z_{m+1} + z_m) = 0.$$

Со вторым порядком точности аппроксимирована и вторая производная  $z''$ , а сумма в (2.21) аппроксимирует интеграл в (2.18) по формуле прямоугольников со средними точками [35] на той же сетке, т. е. с тем же порядком точности.

В системе (2.21)

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \kappa(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j) \cong h_1 \sum_{s=1}^n G(x_s, \bar{t} - \mathbf{v}_j) G(x_s, \bar{t} - \mathbf{v}'_i), \\ b &= b(\mathbf{v}'_i) \cong h_1 \sum_{s=1}^n G(x_s, \bar{t} - \mathbf{v}'_i) \bar{u}(x_s). \end{aligned}$$

Они являются приближенными выражениями интегралов (2.19) на сетке  $\{x_s\}$  с шагом  $h_1$ . Эти величины, не зависящие от  $\alpha$ , рассчитываются программой заранее до решения системы и перебора значений  $\alpha$ .

В результате проведенных аппроксимаций задача о расчете оптимального времени квазиравномерного нагрева для рассматриваемой одномерной модели решается многократным применением стандартной для ЭВМ процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений (например, методом Гаусса [90]).

Приведенные в п. 2.4 результаты были получены независимо обоими названными выше методами: через уравнение Эйлера и методом сопряженных градиентов, которые дали значения  $\{z_i\}$ , совпадающие по крайней мере с графической точностью.

### 2.3.3. Методика решения задачи для уточненной пространственно-трехмерной модели при квазилинейном нагреве

Естественным уточнением рассмотренной выше модели нагреваемой плиты является представление о параллелепипеде. Если при этом процесс остается линейным, то методика решения принципиально не отличается от рассмотренной в п. 2.3.1: по-прежнему возможно Фурье-представление температурного поля, и лишь интегралы и ряды становятся кратными. Здесь полезно отметить, что сравнительная простота формул в одномерном случае не представляет тех преимуществ, на которые можно было бы рассчитывать, если бы речь шла только о расчете поля; решение задачи управления неизбежно связано с использованием ЭВМ, а в этом случае представление о сложности расчета отстает на задний план. Более существенным становится вопрос об экономичности машинного алгоритма.

В случае, если процесс нелинеен, как при высокотемпературном нагреве, метод Фурье уже не применим и потому обращение к численным методам не связано с предварительным явным представлением поля.

Задачу о нагреве изотропного параллелепипеда рассмотрим здесь, предполагая теплофизические параметры материала, зависящими только от температуры (квазилинейный, высокотемпературный нагрев). В качестве управляющей функции  $z(t)$  выберем температуру внешней среды.

Для краткости дальнейшей записи будет удобно ввести следующие обозначения для декартовых координат:  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ . Тогда температурное поле в любой момент  $t$  в любой точке  $M(x_1, x_2, x_3) \in D$  определяется условиями:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = c(u) \varphi(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad M \in D, \quad t \in (0, \bar{t}), \quad (2.22)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_\Gamma = z(t).$$

Распределение температуры  $u[M, \bar{t}, z(t)]$  в конечный момент времени  $t = \bar{t}$  алгоритмически определяется ЭВМ — программой

для любой получаемой в рамках процедуры минимизации функционала (2.10) функции  $z(t)$ .

Соответствующая программа реализует двухциклическую схему расщепления [74], которая является некоторой модификацией итерационно-разностной схемы метода переменных направлений для пространственно-двумерных квазилинейных уравнений теплопроводности [73].

Пусть в параллелепипеде задана прямоугольная координатная сетка — множество точек, равноотстоящих друг от друга на величину шага  $\Delta x_\alpha$  по каждому из трех направлений  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ); при этом крайние точки лежат на поверхности параллелепипеда. Введем на сегменте  $[0, \bar{t}]$  сетку значений аргумента  $t$ , равноотстоящих на величину шага  $\Delta t$ . Тогда температура в любой точке и в любой момент времени представляется сеточной функцией, т. е. набором значений  $\hat{u} = u(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3, t_j)$ , где  $i_1, i_2, i_3, j$  — номера узлов сетки в каждом из четырех, включая время, направлений. Совокупность значений  $\hat{u}$ , соответствующих фиксированному значению  $j$ , назовем временным слоем. Заметим, что нулевой слой известен  $u(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3, 0) = u_0$  и что нас интересует последний слой  $u(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3, \bar{t})$ .

Для получения последнего выберем сетку по  $j$  такой, чтобы число сегментов  $[t_{j-1}, t_j]$  ( $j = 1, \dots, N, t_0 = 0, t_N = \bar{t}$ ) было четным. Каждую пару соседних сегментов  $[t_{j-1}, t_j]$  и  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьем на три равных промежуточных; соответственно каждой такой паре ставится в соответствие система слоев

$$t_{j-1}, t_{j-1} + \frac{1}{3}, t_{j-1} + \frac{2}{3}, t_j, t_j + \frac{1}{3}, t_j + \frac{2}{3}, t_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1).$$

Расчет значений  $\hat{u}$  при некотором  $t_k$  в узлах пространственной сетки, расположенных в направлении оси  $x_\alpha$ , с использованием описанного ниже алгоритма назовем прогонкой в направлении  $x_\alpha$ . Тогда можно сказать, что двухциклическая схема расщепления состоит из следующих шести этапов в предположении, что значение  $\hat{u}^{j-1}$  сеточной функции на  $(j-1)$ -м слое уже известно.

По известной  $\hat{u}^{j-1}$  прогонкой в направлении  $x_1$  определяем  $\hat{u}^{j-1+1/3}$  ( $\hat{u}^{j-1} \xrightarrow{(1)} \hat{u}^{j-1+1/3}$ ); затем по найденной  $\hat{u}^{j-1+1/3}$  прогонкой в направлении  $x_2$  определяем  $\hat{u}^{j-1+2/3}$  ( $\hat{u}^{j-1+1/3} \xrightarrow{(2)} \hat{u}^{j-1+2/3}$ ) и, наконец, по  $\hat{u}^{j-1+2/3}$  прогонкой по направлению  $x_3$  определяем  $\hat{u}^j$  ( $\hat{u}^{j-1+2/3} \xrightarrow{(3)} \hat{u}^j$ ). Далее следуют этапы второго цикла, которые кратко можно записать в виде  $\hat{u}^j \xrightarrow{(3)} \hat{u}^{j+1/3}$ ;  $\hat{u}^{j+1/3} \xrightarrow{(2)} \hat{u}^{j+2/3}$ ;  $\hat{u}^{j+2/3} \xrightarrow{(1)} \hat{u}^{j+1}$ .

В основе описанной циклической процедуры лежит следующее разностное представление элементов дифференциального оператора (2.22). Производная по времени в уравнении (2.22) может быть приближенно представлена отношением вида  $\Delta \hat{u} / \Delta t$ , где

$\Delta \hat{u}$  — разность значений сеточной функции в двух близких временных слоях для любого узла пространственной сетки. Для того же узла дифференциальный оператор  $\frac{1}{c(u)\gamma(u)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$  приближенно представляется конечно-разностным оператором вида

$$\Lambda_\alpha v = \frac{-1}{\Delta x_\alpha^2 b(\bar{u}'_{i_\alpha})} \{ \lambda(\bar{v}'_{i_\alpha}) (v_{i_\alpha+1} - v_{i_\alpha}) - \lambda(\bar{v}'_{i_\alpha-1}) (v_{i_\alpha} - v_{i_\alpha-1}) \},$$

где  $v$  — указанная ниже линейная комбинация значений сеточной функции в двух близких временных слоях из сегмента  $[t_{j-1}, t_j]$ , причем нижний индекс указывает номер пространственного узла, к которому относятся эти значения;  $b = c\gamma$ ;  $\bar{v}'_{i_\alpha} = (1/2)(\bar{u}'_{i_\alpha+1} + \bar{u}'_{i_\alpha})$ , причем в любом из указанных нижним индексом узле

$\bar{u} = \hat{u}^{l-1} - (\Delta t/b)(\hat{u}^{l-1}) \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha \hat{u}^{l-1}$ ;  $\hat{u}'_{i_\alpha}{}^{l-1}$  — значение сеточной функции на  $(j-1)$ -м слое в соответствующем узле.

Индекс оператора  $\Lambda$  определяет направление дифференцирования и вместе с тем направление прогонки, и тогда двухциклическая схема расщепления описывается следующими формулами, относимыми к каждому узлу:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}^{j-1} + \frac{1}{3} - \hat{u}^{j-1}}{\Delta t} + \Lambda_1 \frac{\hat{u}^{j-1} + \frac{1}{3} + \hat{u}^{j-1}}{2} &= 0; \\ \frac{\hat{u}^{j-1} + \frac{2}{3} - \hat{u}^{j-1} + \frac{1}{3}}{\Delta t} + \Lambda_2 \frac{\hat{u}^{j-1} + \frac{2}{3} + \hat{u}^{j-1} + \frac{1}{3}}{2} &= 0; \\ \frac{\hat{u}^j - \hat{u}^{j-1} + \frac{2}{3}}{\Delta t} + \Lambda_3 \frac{\hat{u}^j + \hat{u}^{j-1} + \frac{2}{3}}{2} &= 0; \\ \frac{\hat{u}^j + \frac{1}{3} - \hat{u}^j}{\Delta t} + \Lambda_3 \frac{\hat{u}^j + \frac{1}{3} + \hat{u}^j}{2} &= 0; \\ \frac{\hat{u}^j + \frac{2}{3} - \hat{u}^j + \frac{1}{3}}{\Delta t} + \Lambda_2 \frac{\hat{u}^j + \frac{2}{3} + \hat{u}^j + \frac{1}{3}}{2} &= 0; \\ \frac{\hat{u}^{j+1} - \hat{u}^j + \frac{2}{3}}{\Delta t} + \Lambda_1 \frac{\hat{u}^{j+1} + \hat{u}^j + \frac{2}{3}}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Описанная схема расщепления обладает абсолютной устойчивостью, т. е. свойством не накапливать погрешность вычислений с изменением сетки, и, как известно [74], имеет второй порядок точности, т. е. уклонение  $\hat{u}$  от точного решения задачи в соответствующем узле не превосходит величины  $C \left( (\Delta t)^2 + \sum_{\alpha=1}^3 \Delta x_\alpha^2 \right)$ ,

где  $C^k$  — некоторая константа, не зависящая ни от номера узла, ни от величины шагов пространственной и временной сеток.

Совокупность формул (2.23) представляет собой, очевидно, систему линейных алгебраических уравнений, решаемых последовательно в шести описанных выше этапах. На любом этапе неизвестная сеточная функция  $u$  определяется из подсистемы уравнений (очередная строчка (2.23)), которую, учитывая определение оператора  $\Delta$  и опуская индекс направления  $\alpha$ , можно записать в виде

$$A_i^k u_{i+1} + B_i^k u_i + C_{i-1}^k u_{i-1} + D_i^k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (2.24)$$

где  $u_{i+1}$ ,  $u_i$ ,  $u_{i-1}$  — значения сеточной функции в соответствующем узле, а верхний индекс  $k$  соответствует предшествующему в циклической схеме временному слою; значения сеточной функции на предшествующих слоях, т. е. уже известные значения, входят в коэффициенты (2.24).

Широко известный метод решения системы (2.24), собственно и называемый методом прогонки, состоит в следующем. Положим

$$u_i = p_i u_{i+1} + q_i \quad (i = N-1, N-2, \dots, 1), \quad (2.25)$$

где  $p_i$ ,  $q_i$  — вспомогательные сеточные функции (прогоночные коэффициенты). Поскольку значение температуры внешней среды  $u_N = z^{k+1} = z(t_{k+1})$  известно, формулы (2.24) позволяют определить последовательно значения  $u_i$  в указанном порядке, если предварительно определены значения  $(p_i, q_i)$ . Для определения последних заменим в (2.24) значения  $u_i$  и  $u_{i-1}$ , пользуясь (2.25), откуда  $u_{i-1} = p_{i-1} u_i + q_i = p_{i-1} (p_i u_{i+1} + q_i) + q_{i-1}$ . Потребовав, чтобы полученное равенство было тождеством относительно  $u$ , приравняем к нулю коэффициент при  $u_{i+1}$  и сумму членов, не содержащих этой величины. В результате получим систему уравнений для  $(p_i, q_i)$ :

$$p_i = - \frac{A_i^k}{B_i^k + C_i^k p_{i-1}}; \quad q_i = - \frac{D_i^k + C_{i-1}^k q_{i-1}}{B_i^k + C_i^k p_{i-1}} \quad (2.26)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Начальные значения  $(p_0, q_0)$  для определения этих величин доставляются граничным условием:  $u_0 = p_0 u_1 + q_0 = z^{k+1} = z(t_{k+1})$ , которое удовлетворяется при  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = z^{k+1}$ .

Расчет по формулам (2.26) называется прямым, а по формулам (2.25) — обратным ходом прогонки. Соответствующий расчет реализуется по совершенно элементарной программе для ЭВМ, и циклическое повторение этой операции согласно формулам (2.23) не требует существенных затрат машинного времени. Тем самым определен экономичный алгоритм для расчета температурного поля в конечный момент времени для любого заданного набора  $\{z^l\}$  — сеточного аналога управляющей функции  $z(t)$ .

Теперь решение задачи управления квазиравномерным нагревом на любом промежутке  $[0, \bar{t}]$  (задача А) может быть получено,

Например, с помощью метода сопряженных градиентов [25]. Однако для рассматриваемого нелинейного процесса градиент минимизируемого функционала не допускает явного выражения, подобного найденному в п. 2.3.1. Возможны различные способы алгоритмического построения градиента [35], и здесь ограничимся простейшим из них, непосредственно использующим аппроксимацию искомого управления  $z(t)$  кусочно-постоянной функцией  $z(t) = z_s$  при  $t_{s-1} < t \leq t_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_m = t$ . Отметим, что число точек  $t_s$  не обязано совпадать с числом узлов временной сетки  $\{t_j\}$ , введенной для расчета температурного поля, хотя для удобства расчета следует выбрать в качестве  $\{t_s\}$  некоторое подмножество  $\{t_j\}$ .

При такой аппроксимации функционал  $F_\alpha(z)$  становится функцией  $m$  переменных, хотя и нелинейной  $F_\alpha(z) \equiv \Psi(z_1, z_2, \dots, z_m)$ . Градиент такой функции выражается известным образом  $\text{grad } \Psi = \{\partial \Psi / \partial z_s\}$  и по определению  $\Psi$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_s} = 2 \int \int \int_V (u(M, \bar{t}, z_1, \dots, z_m) - \bar{u}) \frac{\partial u}{\partial z_s}(M, \bar{t}, z_1, \dots, z_m) dv + \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial z_s}. \quad (2.27)$$

Входящие в выражение (2.27) производные  $\partial u / \partial z_s$  могут быть приближенно найдены, например, с помощью конечно-разностной аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_s}(x, \bar{t}, z_1, \dots, z_m) &= \\ &= \frac{1}{2\Delta z_s} \{u(M, \bar{t}, z_1, \dots, z_{s-1}, z_s + \Delta z_s, z_{s+1}, \dots, z_m) - \\ &\quad - u(M, \bar{t}, z_1, \dots, z_{s-1}, z_s - \Delta z_s, z_{s+1}, \dots, z_m)\}. \end{aligned}$$

Для этого необходимо при каждом наборе  $\{z_s\}$  еще два раза рассчитать температурное поле для несколько измененных значений аргумента. При таком подходе следует учитывать некорректность операции численного дифференцирования, т. е. возможность образования ошибки, значительно превосходящей ошибку в значениях поля, если шаг  $\Delta z_s$  слишком мал (при вычитании двух близких величин «съедается» некоторое число десятичных знаков, принадлежащих старшим разрядам [35, 71]). Это обязывает предварительно выбрать оптимальный шаг численного дифференцирования, при котором для заданной области и физических параметров погрешность вычисления производной сохраняется на допустимом уровне (регуляризация по шагу [86]); только после проведения соответствующих математических экспериментов шаг  $\Delta z_s$  можно вводить в качестве параметра в программу, предназначенную для расчета в автоматическом режиме.

Ввиду возможной неустойчивости алгоритма более удобным может оказаться другой способ вычисления производной: реше-

ние краевой задачи, условиям которой при каждом наборе  $\{z_s\}$  удовлетворяет функция  $w_s(M, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial z_s}(M, t)$ . Эти условия можно найти дифференцированием уравнений (2.22) по  $z_s$  при каждом фиксированном значении  $s$  с учетом того, что  $z(t) = z_s$  при  $t \in [t_{s-1}, t_s]$ , а на остальных интервалах от  $z_s$  не зависит. В результате для вычисления производных  $\partial u / \partial z_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$  получаем  $m$  задач вида

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \lambda(u) \frac{\partial w_s}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \lambda'(u) w_s \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \right\} =$$

$$= b(u) \frac{\partial w_s}{\partial t} + b'(u) w_s \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$M \in D, t \in [t_{s-1}, t_s]; \quad (2.28)$$

$$w_s \Big|_F = \begin{cases} 1, & t_{s-1} < t \leq t_s, \\ 0, & t > t_s; \end{cases} \quad w_s \Big|_{t=t_{s-1}} = 0.$$

Уравнения (2.28) совместно с (2.22) образуют систему, которая решается на ЭВМ с помощью разностной схемы, аналогичной описанной выше, однако требующей для своей реализации дополнительных трудовых затрат.

В выражение (2.27) входят также производные  $\partial \Omega / \partial z_s$ , зависящие от выбора стабилизатора. Наряду со стабилизатором, описанным в (2.10) соответственно гладкому управлению, для кусочно-постоянной  $z(t)$  естественно ввести стабилизатор вида

$$\Omega(z) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} |z(t) - \bar{u}|^2 dt = \sum_{s=1}^m (z_s - \bar{u})^2 (t_s - t_{s-1}). \quad (2.29)$$

Действие такого стабилизатора равносильно требованию, чтобы искомое управление, решая поставленную основную задачу, по возможности меньше уклонялось от заданного постоянного уровня  $\bar{u}$ .

Тогда  $\partial \Omega / \partial z_s = 2(z_s - \bar{u})(t_s - t_{s-1})$  при каждом фиксированном  $s$ .

Отметим, что стабилизатор (2.29) является «слабым» [86], и его разумно использовать наряду с предположением о том, что число переключений режима  $m$  невелико. Напротив, гладкое управление соответствует сеточной аппроксимации с достаточно большим значением  $m$ .

Полагая в этом случае

$$\frac{dz}{dt} \simeq \frac{z_k - z_{k-1}}{\Delta t}, \quad \Delta t = t_k - t_{k-1} = \text{const},$$

$$z \simeq \frac{z_k + z_{k-1}}{2} \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k],$$

получаем

$$\Omega(z) = \int_0^{\bar{t}} (z'^2 + z^2) dt = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{1}{\Delta t} (z_k - z_{k-1})^2 + \frac{1}{4} (z_k + z_{k-1})^2 \Delta t \right\}.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z_s} &= \frac{\partial}{\partial z_s} \left\{ \sum_{k=s}^{s+1} \left( \frac{1}{\Delta t} (z_k - z_{k-1})^2 + \frac{\Delta t}{4} (z_k + z_{k-1})^2 \right) \right\} = \\ &= 2 \frac{(z_s - z_{s-1}) - (z_{s+1} - z_s)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} (z_s + z_{s-1} + z_{s+1} + z_s) = \\ &= \frac{1}{2} \Delta t \left\{ (z_{s-1} + 2z_s + z_{s+1}) - \frac{4}{\Delta t^2} (z_{s-1} - 2z_s + z_{s+1}) \right\}, \\ & \quad s = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Здесь можно положить:  $z_0 = u_0$  — начальная температура образца и  $z_m = \hat{u}$  — требуемая температура.

Возвращаясь к формулам (2.10), (2.27), можем теперь утверждать, что все элементы, необходимые для программной реализации общей методики решения задачи управления, алгоритмически определены и в рассматриваемой уточняющей постановке.

Необходимость квалифицированного математического анализа и достаточно сложных разработок при составлении ЭВМ — программ, обеспечивающих автоматизированное решение задачи управления, делает естественным использование уже готовых программных инструментов в качестве составных частей математического обеспечения АСУ технологических процессов. Об одном из таких инструментов ниже пойдет речь при рассмотрении более общей задачи.

### 2.3.4. О решении уточненной задачи управления в произвольной области

Здесь рассматривается задача о высокотемпературном квазиравномерном нагреве без существенных ограничений на форму нагреваемых деталей и геометрическую размерность пространства.

Такая общность постановки основана на методике, описанной в пп. 2.2 и 2.3.1. Здесь по-прежнему искомым управлением является функция  $z(t)$  одной переменной, которую и здесь мы идентифицируем с температурой окружающей среды.

Изменения касаются, однако, следующих элементов: а) алгоритма решения задачи о расчете температурного поля при каждой заданной  $z(t)$ , поскольку такой расчет предстоит проводить для

достаточно произвольной области; б) алгоритма минимизации регуляризованного так или иначе целевого функционала (2.10), поскольку с использованием более сложных алгоритмов более остро ставится проблема экономии машинного времени.

Для расчета температурного поля в произвольной области для нелинейного, высокотемпературного процесса нагрева, когда теплофизические параметры зависят только от температуры, можно использовать пакет программ, разработанный в ИПМ АН СССР [67].

В числе операторов, реализованных в этом комплексе программ, входит итерационная процедура, связанная с нелинейностью задачи — «внешний» итерационный процесс, когда коэффициенты «замораживаются» на предшествующей итерации, так что задача для очередного приближения называется линейной. Для решения этой линейной задачи, после ее конечно-разностной аппроксимации с помощью интегринтерполяционного метода [73], используется двухслойная итерационная схема с чебышевским выбором параметров (внутренний итерационный процесс) [74]. Устойчивость последней процедуры управляется автоматизированным выбором шага по времени, для чего используются получаемые программой оценки спектра оператора разностной схемы.

Наличие готового пакета программ, рассчитанного на широкий круг задач, предполагает активное отношение «пользователя» к сопровождающей пакет инструкции, где указано, какие данные и каким образом следует ввести в программу для расчета конкретного поля.

Ввиду произвольности области разностная схема ТЕКОН рассчитана на общую ортогональную криволинейную систему координат  $(q_1, q_2, q_3)$ :

$$\begin{aligned}x &= x(q_1, q_2, q_3), \\y &= y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).\end{aligned}$$

Как известно, в такой системе и с учетом зависимости коэффициентов от температуры задача (2.3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial w}{\partial q_3} \right) \right\},\end{aligned}$$

$$\mu(q_1 q_2 q_3) \in D^*, \quad (2.30)$$

$$a = \int_{\varphi(\mu)}^{u(\mu)} b(\xi) d\xi, \quad b(\xi) = c(\xi) \psi(\xi), \quad w = \int_{\varphi(\mu)}^{u(\mu)} \lambda(\xi) d\xi,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mu), \quad u|_{r^*} = z(t).$$

Выбор системы, наиболее подходящей для формы нагреваемой детали, не исключая и декартову, проводится пользователем, и

об этой программе передается информация в виде задания (наряду с формулами для расчета коэффициентов:  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ) формул для расчета параметров Ламэ ( $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ), а также информация о положении узлов сетки в области, занятой деталью, с выделением граничных, а среди них тех, в которых в процессе счета уже автоматически задаются значения  $z(t)$ . Информация об узлах сетки, которая может быть и неравномерной, позволяет программе вычислять необходимые для разностной схемы шаги между узлами и другие геометрические элементы.

В случае симметрии области детали соответственно симметричного распределения температурного поля в ней имеется возможность сократить время расчета, отнеся его только к части симметричной области. В этом случае на внутренних границах этой части (не соприкасающихся с внешней средой) задаются однородные условия второго рода  $du/dn = 0$ , где  $n$  — направление нормали к границе. Граничные узлы, в которых следует задать это условие, обнаруживаются программой, как те из числа указанных, в которых пользователем не предписывается задавать условие первого рода.

В связи с рассматриваемой задачей естественно остановиться на одном из алгоритмов минимизации функционала (2.10), не связанном с вычислением градиента. Это метод Розенброка [91], являющийся некоторой реализацией метода возможных направлений [20], допускающий учет ограничений на уровень температуры в процессе нагрева (2.4).

Как и выше, предполагается, что управляющая функция  $z(t)$  аппроксимирована ступенчатой  $\vec{z} \equiv \{z_s\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , так что в зависимости от детальности аппроксимации функционал (2.10) оказывается функцией  $m$  переменных:  $F_\alpha(\vec{z})$  при каждом  $\alpha$ .

Задача (2.10) сводится теперь к поиску  $\vec{z}^* \in E_m$ , при котором  $F_\alpha(\vec{z})$  принимает наименьшее значение. Как и всякий метод прямой минимизации функции, рассматриваемый здесь является итерационным:  $\vec{z}^{k+1} = R(\vec{z}^k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  при некотором заданном  $\vec{z}^{(0)}$ , на выборе которого мы остановимся позже.

Операция  $R$ , определяющая по уже найденному  $\vec{z}^{(k)}$  очередное приближение  $\vec{z}^{(k+1)}$ , включает последовательность  $m$  одномерных поисков в каждом из  $m$  специальным образом определяемых направлений. При  $k = 0$  эти направления даются «ортами»  $\vec{e}_i$  координатных осей в  $E_m$ , т. е. совпадают с направлением изменения координат вектора  $\vec{z}$  в ходе процесса направления поиска изменяются. Неизменной для начального и последующих шагов является процедура выбора шага в каждом из направлений, которую рассмотрим подробно для  $k = 0$ .

Пусть наряду с  $\vec{z}^{(0)}$  задан вектор начального шага  $\vec{\lambda}^{(0)} = \{\lambda_s^{(0)}\}$ . Сделаем шаг в направлении оси  $\vec{e}_1$ , образуя  $\vec{z}_1^{(0)} = \vec{z}^{(0)} + \lambda_1^{(0)} \vec{e}_1$ ; если в ходе расчета температурного поля для  $\vec{z}_1^{(0)}$  обнаруживается, что температура где-либо превышает допустимую величину, то величина шага уменьшается, например, вдвое ( $\lambda_{\text{нов}}^{(0)} = (1/2) \lambda_{\text{стар}}^{(0)}$ ) и попытка рассчитать поле повторяется; если в ходе последовательных попыток с уменьшением шага не удалось соблюсти условие неперегрева, а между тем оказалось, что  $|\lambda_1^{(0)}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная величина, то движение в направлении  $\vec{e}_1$  считается неудачным и программа переходит к движению в направлении  $\vec{e}_2$ . В случае, если при некотором  $\lambda_{\text{нов}}^{(0)}$  удалось получить  $u(M, \vec{t}, \vec{z}_1^{(0)})$  без перегрева, вычисляем  $F_\alpha(\vec{z}_1^{(0)})$ ; если  $F_\alpha(\vec{z}_1^{(0)}) < F_\alpha(\vec{z}^{(0)})$ , то шаг считается удачным и в этом случае тотчас заменяется  $\vec{z}^{(0)}$  на  $\vec{z}_1^{(0)}$ ; если же  $F_\alpha(\vec{z}_1^{(0)}) \geq F_\alpha(\vec{z}^{(0)})$ , шаг по-прежнему считается неудачным и  $\vec{z}^{(0)}$  не меняется.

В случае удачного шага величина  $\lambda_1^{(0)}$  умножается на  $\beta > 0$ :  $\lambda_1^{(1)} = \beta \lambda_1^{(0)}$ ; в случае неудачного шага  $\lambda_1^{(0)}$  уменьшается на  $\gamma > 0$  для движения при следующей итерации в противоположном направлении  $\lambda_1^{(1)} = \gamma \lambda_1^{(0)}$ . После этого программа переходит к аналогичному «прощупыванию» направления  $\vec{e}_2$  и т. д. до  $\vec{e}_m$ , в результате чего получается новое приближение искомого вектора:  $\vec{z}_m^{(0)}$  вместо  $\vec{z}^{(0)}$  и новый вектор шага  $\lambda_m^{(0)}$  с компонентами  $\beta \lambda_j^{(0)}$  или  $\alpha \lambda_j^{(0)}$ . Отметим, что в работе [91] рекомендуется брать  $\beta = 3$  и  $\alpha = -0,5$ .

С новым вектором шага  $\lambda_m^{(0)}$  программа вновь возвращается к направлению  $\vec{e}_1$  и повторяет весь цикл. Последовательность таких циклов обрывается лишь при условии, что по каждому из направлений за успехом последует неудача. К этому моменту программа успевает сделать несколько шагов по каждой из координат  $z_s$ . Вектор, получившийся в момент прерывания, принимается за очередное приближение  $\vec{z}^{(1)}$ ; вместе с ним фиксируется новый вектор шагов  $\vec{\lambda}^{(1)}$ .

Описанная процедура является, очевидно, модификацией метода покоординатного спуска, однако рассматриваемый метод предусматривает возможность выбора новых направлений движения, к нему и обращается программа после образования  $(\vec{z}^{(1)}, \vec{\lambda}^{(1)})$ .

Пусть уже найдены  $\vec{z}^{(k)}$  и  $\vec{\lambda}^{(k)}$ , а также направления, характеризующиеся единичными векторами  $\vec{p}_s^{(k)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ . Очередные

направления  $\vec{p}_s^{(k+1)}$ , на которые (вместо  $\vec{e}_s$ ) ориентируются подобные описанным выше циклы, строятся следующим образом.

Обозначим  $\Lambda_s^{(k)}$  алгебраические суммы всех успешных шагов (суммарное перемещение) в направлении  $\vec{p}_s^{(k)}$ . Тогда  $\{\vec{p}_s^{(k+1)}\}$  образуется как ортонормированная система, построенная методом ортогонализации [32] на следующих базисных векторах:  $\vec{g}_s^{(k)} = \sum_{l=s}^m \Lambda_l^{(k)} \vec{p}_l^{(k)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , причем  $\vec{p}_1^{(k+1)} = \vec{g}_1^{(k)} / \|\vec{g}_1^{(k)}\|$ , где  $\|\vec{g}_1^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m (\Lambda_l^{(k)})^2}$ .

Процесс итераций  $k \rightarrow (k + 1)$  прекращается после того, как на нескольких последовательных этапах величина  $\|\vec{g}_1^{(k)}\|$  остается меньше некоторой наперед заданной величины.

Описанный метод Розенброка зависит от выбора начального приближения  $\vec{z}^{(0)}$ . В нашей задаче выбор начального приближения облегчается тем, что сглаживающий функционал минимизируется на последовательности  $\{\alpha_i\}$ , сходящейся к нулю.

Как установлено в работе [86], при достаточно больших значениях  $\alpha$  элемент, минимизирующий  $F_\alpha(z)$ , сколь угодно близок к элементу  $z_\alpha$ , минимизирующему стабилизатор  $\Omega(z)$ . Следовательно, при больших  $\alpha = \alpha_0$  можно положить  $\vec{z} = \vec{z}_\alpha$ , причем  $\vec{z}_\alpha$  обычно легко оценить по виду стабилизатора. Если уже найден хотя бы приближенно  $\vec{z}^{\alpha_i}$  — элемент минимизирующий функционал при  $\alpha = \alpha_i$ , то его естественно принять за начальное приближение для метода Розенброка при  $\alpha = \alpha_{i+1}$ :  $\vec{z}^{(0)} = \vec{z}^{\alpha_i}$ . Это соответствует процедуре спуска по параметру в сглаживающем функционале, неоднократно использовавшейся в различных приложениях [23].

Отметим, что в задаче о поиске минимума целевого функционала при фиксированном  $\vec{l}$  (задача А) можно принять другую аппроксимацию управляющей функции  $z(t)$ , а именно считать, что  $z(t)$  принадлежит классу ограниченных функций (например,  $z(t) \leq u^*$  согласно условию (2.4)) в фиксированном разбиении сегмента  $[0, \vec{l}]$  на частичные  $[t_{s-1}, t_s]$ , на каждом из которых  $z(t)$  аппроксимируется полиномом степени не выше  $l$  (например,  $l = 2, 3$ ).

Такой полином можно задать по некоторой опорной сетке значений  $\{z_j\}$ , в частности, с использованием значений производных в узловых точках, переходя к конструкции «сплайна» [3]. В последнем случае искомыми оказываются значения функции и некоторых ее производных, на которые также должны быть наложены явные количественные ограничения.

Множество таких функций является компактным, и потому его введение эквивалентно введению стабилизатора, и последний,

а тем самым и параметр  $\alpha$  можно в этом случае исключить. Тогда описанный выше метод минимизации можно применить непосредственно к целевому функционалу. Возможно, для каких-либо конкретных ситуаций такая методика окажется более экономичной. Однако есть две причины, по которым описанный выше подход представляется в общем случае более предпочтительным: 1) в отличие от температурного поля значения его производных по времени не могут быть ограничены заранее естественным образом, поэтому вводимые на них ограничения сужают класс решений задачи, быть может, необоснованно; 2) вместе с отказом от параметрического функционала исчезает и возможность использовать метод спуска по параметру для стабилизации процесса минимизации по начальному приближению. Это уменьшает уровень автоматизации алгоритма.

## 2.4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО НАГРЕВА

### 2.4.1. Результаты математического эксперимента для линейного процесса

Задача об определении минимального времени квазиравномерного нагрева решалась на ЭВМ БЭСМ-6 по методике, изложенной в пп. 2.3.1 и 2.3.2 для стального образца, параметры которого указаны в п. 2.4.2. Напомним, что при нагреве в среде постоянной температуры  $u = 250^\circ\text{C}$  время нагрева оказывается равным 52 с.

Температурное поле в процессе нагрева (условие (2.4)) ограничивалось сверху температурой плавления ( $u^* \sim 1500^\circ\text{C}$ ). Для

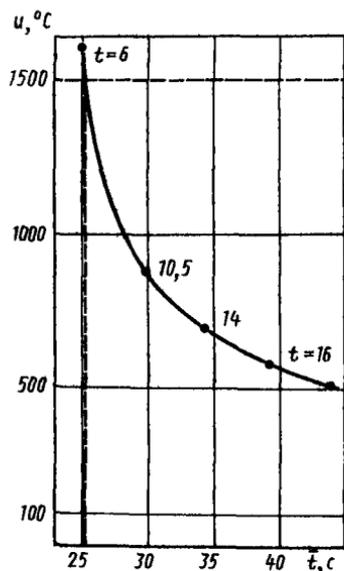
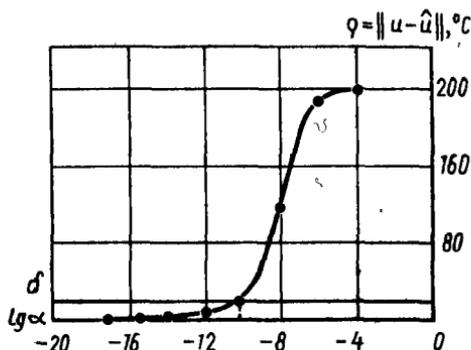


Рис. 2.4. Зависимость максимальной температуры от полного времени нагрева для одномерной модели

Рис. 2.5. Выбор параметра регуляризации  $\alpha$  при заданном  $\delta$  по поведению уклонения  $\rho$  температуры от заданного уровня



найденного при каждом значении  $\bar{t}$   $\alpha^{(b)}(t)$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$  прямым расчетом на достаточно мелкой сетке по  $x$  и  $t$  оценивался  $\max u(x, t)$  по области:  $x \in Q$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$ . В случае, если оказывалось, что  $\max u(x, t) < u^*$ , значение  $\bar{t}$  уменьшалось на величину шага выбранной сетки; в противном случае программа фиксировала предшествующее значение  $\bar{t}$  как наименьшее ( $T$ ). Прекращение поиска  $T$  предусматривалось и в том случае, если бы при заданном  $\delta = 20^\circ\text{C}$  при очередном значении  $\bar{t}$  оказалось, что в процессе минимизации сглаживающего функционала при достаточно малых значениях  $\alpha$  уклонение температуры от заданного уровня превосходит величину  $\delta$  (нарушение первого из условий (2.4)). Однако в проведенном эксперименте из двух названных условий из-за интенсивного роста величины  $\max u(x, t)$  с уменьшением  $\bar{t}$  оказалось нарушенным первое.

Динамику поиска минимального времени нагрева характеризуют рис. 2.4 и 2.5. На первом из них представлена зависимость максимальной температуры от величины  $\bar{t}$  с указанием моментов времени  $t$ , в которые достигается максимум при каждом  $\bar{t}$ , на втором — величина уклонения температурного поля от заданного уровня  $u$  в зависимости от параметра регуляризации  $\alpha$  при  $T = 30$  с (при таком времени нагрева уклонение не превосходит  $\delta$  при достаточно малом  $\alpha$ ).

Минимальное время нагрева, полученное в результате такого поиска, оказалось равным 25 с, т. е. примерно вдвое меньшим, нежели при нагреве в среде постоянной температуры  $u = 250^\circ\text{C}$ . При этом максимальное значение температуры, не превосходящее еще точки плавления, достигается на поверхности плиты в момент времени, примерно втрое меньший значения  $T$ , так что заметное повышение температуры носит локальный характер.

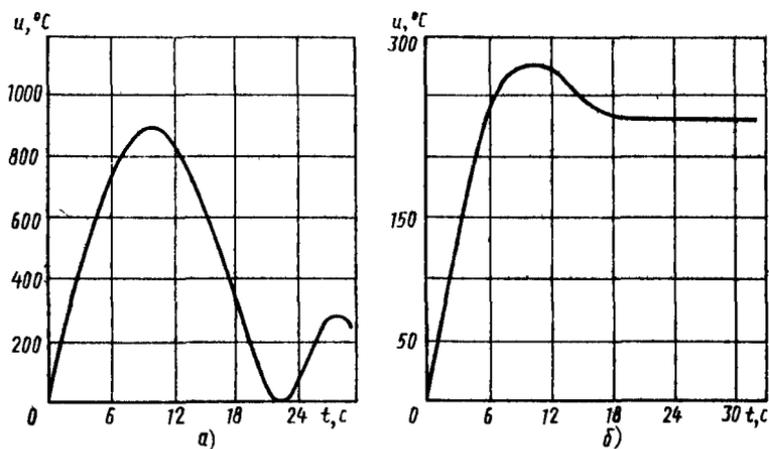


Рис. 2.6. Зависимость температуры от времени для одномерной модели на поверхности (а) и в срединной плоскости (б)

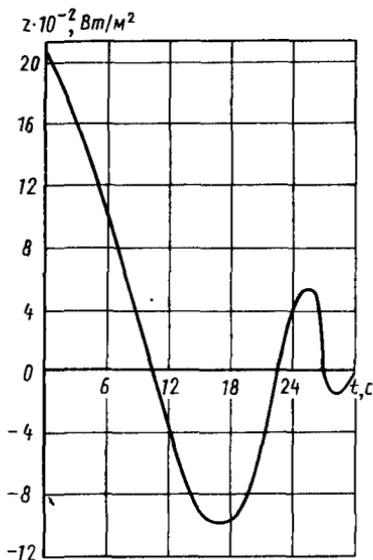


Рис. 2.7. Оптимальный тепловой поток на поверхности

На рис. 2.6 представлена зависимость температуры нагрева от времени на поверхности плиты (а) и в срединной ( $x = 0$ ) плоскости (б). Видно, что в конечный момент  $t = T$  максимальная разница в значениях температуры не превосходит  $20^\circ\text{C}$ , как и уклонение от заданного уровня.

Управляющая функция — тепловой поток для оптимального варианта нагрева — представлен на рис. 2.7.

Отметим, что для назначения технологического режима можно в равной мере пользоваться как результатами, представленными

на рис. 2.7, так и информацией о температуре поверхности, содержащейся в номограмме рис. 2.6, а, в зависимости от того, какая из двух величин (тепловой поток или температура на поверхности) легко контролируется.

#### 2.4.2. Результаты математического эксперимента для уточненной модели плиты

Рассмотрим результаты решения задачи о получении квазиравномерного температурного поля  $\hat{t} = 500^\circ\text{C}$  к заданному моменту времени  $\hat{t} = 12,5$  с, относящиеся к образцу размером  $20 \times 60 \times 120$  относительных единиц из стали 40, параметры которой в зависимости от температуры представлены на рис. 2.8.

Если искать управляющую функцию, каковой в данном случае является температура внешней среды, в классе «ступенчатых»  $z(t) = z_s$  при  $t \in [t_{s-1}, t_s]$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$  в неболь-

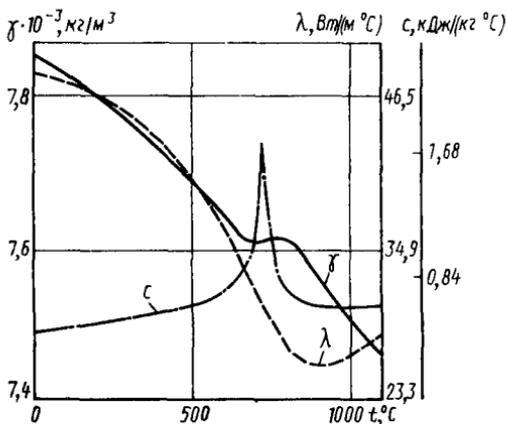
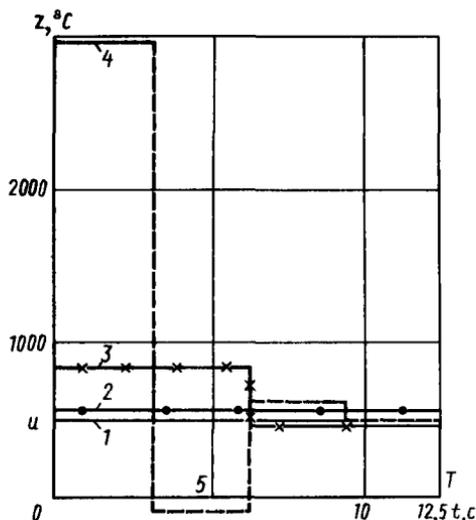


Рис. 2.8. Теплофизические характеристики стали 40

Рис. 2.9. Управляющие температуры  $z(t)$  для двумерной модели:  $1$  — априорно заданная ( $z(t) = \hat{u}$ );  $2-4$  — рассчитанные при различном числе  $m-1$  переключений ( $2 - m = 1$ ;  $3 - m = 2$ ;  $4 - m = 4$ )



шим числом звеньев  $m$ , то можно положить в (2.10)  $\alpha = 0$  (регуляризация задачи по параметру  $m$ ). В этом случае с помощью метода сопряженных градиентов минимизируется непосредственно целевой функционал.

На рис. 2.9 представлены найденные управления при  $m = 1$  (нагрев в постоянном температурном поле), а также  $m = 2$  и  $4$ .

Уже при  $m = 1$  полученное управление дает выигрыш по сравнению с управлением  $z(t) \equiv \hat{u} = 500^\circ\text{C}$ . В этом последнем случае минимальное значение целевого функционала, отнесенное к среднему уровню конечной температуры, составляет 0,15, тогда как для полученного результата соответствующее значение равно 0,11. При  $m = 2$  та же характеристика результата составляет 0,02. Величина абсолютного отклонения конечного температурного поля от требуемого уровня  $\rho = \max |u(M, \bar{t}) - \hat{u}|$  оказывается равной  $107^\circ\text{C}$  для  $m = 1$  и  $25^\circ\text{C}$  для  $m = 2$ . Таким образом, уже при незначительной модуляции управляющего температурного поля, соответствующей, как можно убедиться, увеличению энергетических затрат более чем на 10 %, получается эффект, удовлетворительный для практических целей; отклонение от заданного уровня не превосходит 5 %.

Отметим, что при увеличении значения  $m$  сказывается неустойчивость задачи и уже при  $m = 4$  получается трудно реализуемое управление, содержащее участок отрицательной по Цельсию температуры (см. штриховая линия на рис. 2.9).

Ступенчатое управление с увеличенным числом звеньев, а также приближение к непрерывному управлению можно получить, решая задачу (2.10) при  $\alpha > 0$  (регуляризация по параметру  $\alpha$ ). Рассмотрим результаты эксперимента, проведенного для  $m = 8$  при слабом стабилизаторе:

$$\Omega(z) = \int_0^T |z(t) - \hat{u}|^2 dt.$$

### 2.1. Уклонения температуры от заданного уровня

$\alpha$	$\bar{\rho}^*$	$\rho, ^\circ\text{C}$
10	0,06	81
1	0,04	47
0,1	0,02	21
0,01	0,01	11

В табл. 2.1 даны в зависимости от  $\alpha$  относительные значения целевого функционала

$$\bar{\rho}^* = \left\{ \int_D \int \left\{ u[M, \bar{t}, z^\alpha(t)] - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{u} \right\}^2 d\tau_M \Big/ \int_D \int u^2[M, \bar{t}, z^\alpha(t)] d\tau_M \right\}^{1/2},$$

а также отклонения температурного поля от заданного уровня

$$\rho = \max_{M \in D} |u[M, \bar{t}, z^\alpha(t)] - \bar{u}|.$$

Видно, что практически приемлемые решения соответствуют значениям  $\alpha = 0,1$  или  $0,01$ .

Соответствующие управляющие функции представлены в непрерывном изображении, наряду с другими, на рис. 2.10. Можно заметить, что значения управляющей температуры не превышают температуры плавления и вполне реализуемы.

### 2.4.3. Примеры решения задач в произвольной области

Результаты решения задач квазиравномерного нагрева образцов произвольной формы рассмотрим на примере пространственно-двумерных моделей, имитирующих шестерню (модель I) и колечка-

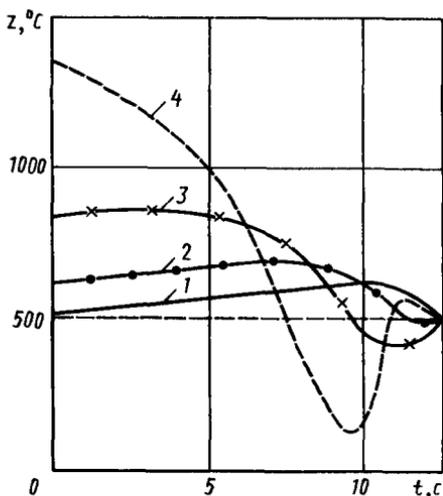


Рис. 2.10. Непрерывные управления для двумерной модели при разных значениях  $\alpha$ : 1 —  $\alpha = 10$ ; 2 —  $\alpha = 1$ ; 3 —  $\alpha = 0,1$ ; 4 —  $\alpha = 0,01$

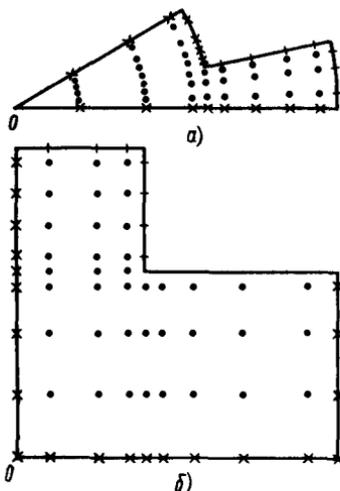


Рис. 2.11. Сечения заготовок с указанием узлов разностной сетки: а — модель I; б — модель II

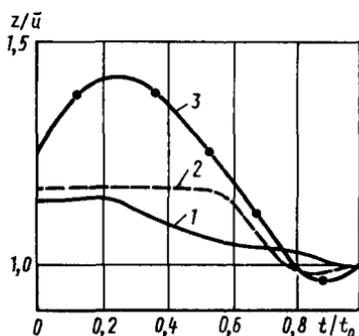


Рис. 2.12. Оптимальные управляющие функции для модели II при различной продолжительности нагрева  $t_0$ :  
 1 — 1000 с; 2 — 800 с; 3 — 600 с

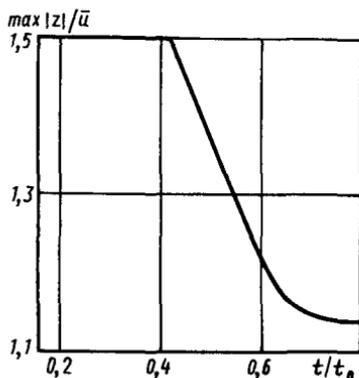


Рис. 2.13. Максимум управляющей температуры в зависимости от времени нагрева при  $t_0 = 1000$  с

тый вал (модель II). На рис. 2.11 представлены сечения элементов этих моделей с расположением узлов сетки, использованных при расчетах температурного поля в рабочей области, с учетом симметрии деталей. Материал деталей — сталь 40.

В проведенном математическом эксперименте образцы требовалось нагревать до температуры  $\hat{u} = 1000$  °С, допуская неравномерность в конечном температурном поле не более чем  $\delta = 0,02$   $\hat{u} = 20$  °С и не превышая температуры плавления ( $u^* = 1500$  °С) в процессе нагрева.

Начальная температура полагалась равной  $u_0 (M) = 18$  °С, так что при таком нагреве, когда теплофизические параметры меняются в пределах:  $48,15 \geq \lambda (u) \geq 26,75$  Вт/(м·°С),  $0,37 \leq c (u) \leq 1,47$  кДж/(кг·°С) [16], — процесс существенно нелинейный.

При нагреве в среде постоянной температуры время квазиравномерного нагрева деталей до заданного выше уровня  $t^* = 201,5$  с для модели I и  $t^* = 1260$  с для модели II.

На рис. 2.12 представлены в относительных единицах для модели II управляющие функции, соответствующие меньшим, чем  $t^*$ , значениям продолжительности нагрева: 1000, 800, 600 с. Видно, что требуемый эффект сохраняется за счет локального повышения

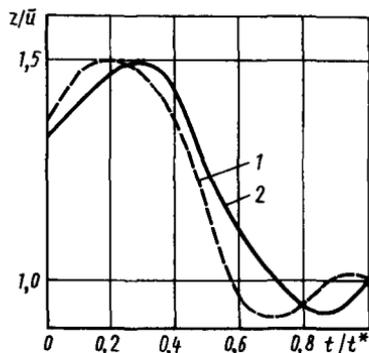


Рис. 2.14. Управляющие функции при оптимальном времени нагрева:

1 — модель I; 2 — модель II

температуры внешней среды на некотором начальном временном участке нагрева.

Зависимость величины  $\max |z|$  от времени нагрева  $t$  для той же модели представлена на рис. 2.13 также в относительных единицах в том диапазоне  $t^*$ , где еще нет нарушения ограничения  $u \leq u^*$  в продолжении нагрева. Естественно, что  $\max |z|$  возрастает с уменьшением  $t^*$  аналогично тому, что было установлено для более простой модели (см. п. 2.4.1).

Наименьшее время КРН (задача А) оказывается равным 113 с для модели I и 535 с для модели II. Таким образом, время нагрева может быть сокращено примерно вдвое за счет управления температурой нагревающей среды во времени. Соответствующие управляющие функции также в относительных единицах изображены для обеих моделей на рис. 2.14.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЗАКАЛКИ СТАЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ

---

В этой главе изложены результаты математического моделирования процесса индукционной поверхностной закалки, полученные в рамках сотрудничества ЗИЛ и МГУ. Некоторые из этих результатов, связанные с использованием элементов теории регуляризации [86], опубликованы в работах [64, 62, 69].

### 3.1. ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И УСЛОВИЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Известно, что целью поверхностного упрочнения стальных деталей, в том числе и поверхностной закалки, является создание в поверхностном слое мартенситной структуры при сохранении достаточно вязких (пластичных) свойств сердцевины.

Такая обработка используется в двух случаях: во-первых, когда свойства сердцевины практически не влияют на эксплуатационные характеристики и поверхностная обработка выгодна чисто энергетически; во-вторых, когда для конструктивной прочности изделия необходимо сохранить запас пластических свойств неупрочненного материала. Во втором, наиболее распространенном случае, значение приобретают и свойства переходной зоны, которая при оптимальной структуре должна характеризоваться плавным, а не скачкообразным переходом от высокой прочности к низкой.

Хорошо известно, что при скоростных нагревах стальных образцов для получения мартенситной структуры (пересыщенный  $\alpha$ -раствор углерода в железе с особой субструктурой) необходимо осуществлять нагрев несколько выше критической температуры  $A_{c3}$ , так как при скоростных нагревах критические точки смещаются к более высоким температурам [6]. В отношении охлаждения условия остаются традиционными — скорость должна быть выше критической в интервале до начала мартенситного превращения.

Метод индукционного нагрева, разработанный В. П. Вологдиным, характерен тем, что нагрев ферромагнитного образца проводится токами высокой частоты, индуцируемыми в его толще внешним переменным магнитным полем. Благодаря скин-эффекту токи достигают достаточно большой амплитуды в приповерхностных

слоях, где электрическая энергия непосредственно преобразуется в тепловую. При этом прогревание слоев на глубине, превышающей глубину проникновения тока заданной частоты, происходит в основном за счет теплопроводности материала. Во избежание перегрева приповерхностных слоев и вместе с тем для прогрева более глубоких в той мере, в какой это необходимо для переходной зоны, внешним магнитным полем управляют таким образом, чтобы обеспечить более или менее длительную изотермическую выдержку вблизи поверхности.

Соответственно при математическом моделировании можно выделить три стадии процесса: а) быстрый нагрев приповерхностных слоев образца до задаваемой температуры аустенитных превращений; б) изотермическую (по отношению к указанным слоям) выдержку; в) быстрое охлаждение, проводимое при любом способе закалки с поверхности (например, быстрым потоком жидкости или газа, омывающим образец) за счет теплоотдачи в окружающую среду и теплопроводности в толще образца.

Учитывая экспериментально установленные связи между структурными (соответственно прочностными) и термическими характеристиками материала, можно решать задачу математического моделирования на уровне изучения динамики температурных полей (электромагнитного происхождения), без чего немисливо решение задачи более эффективного управления процессом закалки.

Целью такого управления является получение высокой прочности изделия при минимальных материальных и энергетических затратах. В частности, при рациональном управлении процессом индукционной закалки в результате повышения качества деталей, изготовленных из углеродистых сталей, можно добиться экономии легирующих элементов.

Далее рассмотрим прежде всего задачу о закалке цилиндрических образцов в соленоидальном индукторе, схематически представленном на рис. 3.1. В этом случае индуцируемые токи текут по азимуту, а для достаточно длинных образцов можно принять их «бесконечно протяженными» и использовать аксиально-симметричную модель для описания процесса, когда все физические поля зависят только от радиуса. Это позволяет выделить основные закономерности, не загромождая описание несущественными, с точки зрения технолога, деталями.

### 3.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА И СТЕПЕНЬ ЕЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Параметрами, характеризующими состояние ферромагнитного образца в процессе нагрева в температурном диапазоне  $0^\circ\text{C} \leq t \leq 1000^\circ\text{C}^*$ , являются следующие величины: теплоемкость стали  $c = c(t)$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda = \lambda(t)$  и плотность  $\gamma = \gamma(t)$ , претерпевающие более или менее резкие изменения в окрестности точки Кюри ( $t^* \sim 725^\circ\text{C}$ ) (поведение этих величин,

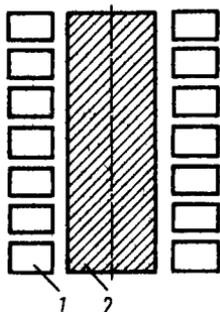


Рис. 3.1. Индуктор для закалки цилиндрических деталей:  
1 — спираль соленоида; 2 — тело, цилиндрическая поверхность которого нагревается под закалку

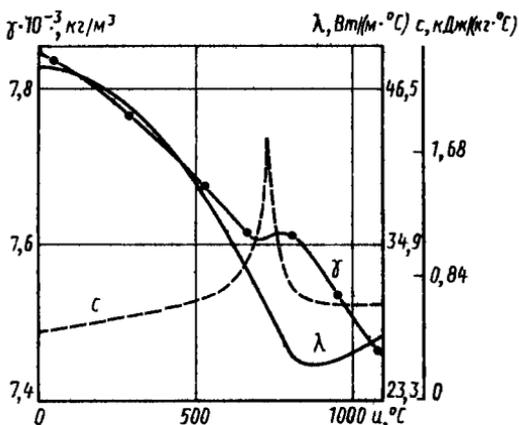


Рис. 3.2. Теплофизические характеристики стали 45:

$c$  — удельная теплоемкость;  $\lambda$  — теплопроводность;  $\gamma$  — плотность

осредняющее известные экспериментальные данные [16], представлено на рис. 3.2); магнитная проницаемость  $\mu = \mu(t)$ , претерпевающая «скачок» в окрестности точки Кюри между двумя постоянными значениями  $\mu_0 = 100$  ( $t > t^*$ ) и  $\hat{\mu} = 1$  ( $t < t^*$ ); проводимость материала  $\sigma = \sigma(t)$ , экспериментальная зависимость которой от температуры выражена формулой

$$\sigma(t) = \frac{1}{\rho(t)}, \quad \rho(t) = \begin{cases} \rho_{\min} + \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{850 - t^*} (t - t^*), & t \leq 850^\circ\text{C}; \\ \rho_{\max}, & t > 850^\circ\text{C}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\rho_{\min} = 0,2 \cdot 10^{-4}$  Ом·см;  $\rho_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-4}$  Ом·см;  $t^*$  — температура внешней среды.

Температурное поле, вызванное циркулирующими токами высокой частоты  $\omega = 2\pi f$ , может быть найдено как решение самосогласованной задачи для уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности, представленной в цилиндрической системе координат. Учитывая приближенный характер задания параметров материала, естественно пренебречь в уравнениях Максвелла как токами смещения, так и влиянием узкой переходной области в окрестности точки Кюри на электромагнитное поле. Учитывая далее несоизмеримость скоростей распространения электромагнитных и тепловых волн, представим напряженность, например, магнитного поля  $\vec{H} = \{0, 0, H(r, \varphi)\}$  в виде  $H = \omega(r, \varphi) e^{-i\omega t}$ , где  $\omega(r, \varphi)$  — медленно меняющаяся со временем амплитуда ко-

\*Температура 1000 °C принята как предельная для подавляющего числа конструкционных сталей при нагреве со скоростями до  $5 \cdot 10^3$  °C/c.

лебаний. Тогда осреднение уравнений по периоду приводит к следующей задаче для температурного поля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + 0,12 \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 &= c(t) \gamma(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma(t)} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= \frac{\partial (\mu w)}{\partial \tau} - i \omega \mu w; \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \hat{H}(t) (t|_{r=R} - t^*), \quad w|_{r=R} = F(\tau), \quad (F(0) = 0); \\ |\omega| < +\infty, \quad |t| < +\infty, \quad w|_{\tau=0} &= 0, \quad t|_{\tau=0} = t^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие для температуры на поверхности ( $r = R$ ) образца допускает при той или иной известной зависимости  $\hat{H}(t)$  достаточно общий закон теплообмена (в том числе излучением). Однако, как показывает технологическая практика, при быстром нагреве теплоотдача с поверхности незначительна, так что можно считать ее теплоизолированной ( $\hat{H} = 0$ ). В условии для  $w$  на поверхности образца (см. (3.2))  $F(\tau)$  — медленно меняющаяся амплитуда внешнего электромагнитного поля, зависящая от времени, пропорциональная амплитуда силы тока в индукторе  $F(\tau) = nI(\tau)$ , где  $n$  — число витков на единицу длины индуктора, ток в котором выражается формулой  $\vec{j} = I(\tau) e^{-i\omega\tau}$ .

Условия (3.2) исчерпывают формальную математическую постановку задачи о нагреве при любой заданной функции  $F(\tau)$ , обеспечивающей, в частности, изотермическую выдержку поверхности.

Процесс охлаждения описывается уравнением теплопроводности, аналогичным (3.2), при  $w(r, \tau) \equiv 0$  и начальном распределении температуры  $t(r, \hat{t}_h) = u(r)$ , где  $u(r)$  — распределение, полученное в результате нагрева к моменту  $\hat{t}_h$  окончания изотермической выдержки. При охлаждении теплообменом на поверхности пренебречь нельзя, так как именно он определяет эффект закалки, и закон теплообмена должен быть задан, что формально исчерпывает формулировку математической модели в стадии охлаждения.

Приведенная математическая модель закалки не содержит информации о ряде величин и потому остается неопределенной.

Во-первых, технолог обычно не может указать ни функции  $I(\tau)$ , ни тем более  $F(\tau)$ , управляющих процессом нагрева. Зато ему хорошо известен ожидаемый и технологически контролируемый результат нагрева: поведение температуры поверхности образца  $\varphi(\tau)$ , представленное графиком на рис. 3.3. Таким образом,

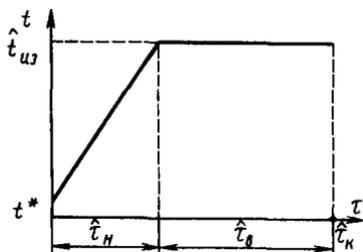


Рис. 3.3. Ожидаемая температура поверхности образца как функция времени ( $\hat{t}_h = \hat{\tau} = \hat{t}_H + \hat{t}_D$ )

$F(\varphi)$  также следует отнести к неизвестным функциям, и возникает задача об ее определении по заранее заданной граничной температуре  $\varphi \rightarrow F(\varphi)$ , где  $\varphi$  и  $F$  связаны неявным образом условиями задачи (3.2). Эту связь можно записать формально в виде операторного уравнения (см. гл. 1, п. 1.1.3)  $\varphi = AF$ , где  $A$  — совокупность операций, соответствующая решению задачи (3.2) при заданной функции  $F(\tau)$  с последующей выборкой граничных значений температуры. Задача об определении  $F(\tau)$ , предшествующая определению температурного поля или решаемая одновременно с его определением, относится к числу обратных задач типа управления (в данном случае — это управление нагревом).

Во-вторых, процесс охлаждения поверхности потоком жидкости, вообще говоря, включает три стадии: пленочное кипение, пузырьчатое кипение и конвективный теплообмен. На первой стадии вокруг изделия образуется пленка перегретого пара, оказывающая теплоизолирующее действие, во второй стадии развивается процесс образования паровых пузырей, кипения жидкости на поверхности детали и охлаждение происходит быстро, на третьей стадии отвод теплоты происходит за счет конвекции и теплопроводности и охлаждающее действие среды уменьшается [26, 28].

При больших скоростях водяного потока, характерных для закалки, пленка пара мгновенно им смывается и соответствующей стадией теплообмена можно пренебречь. Предполагают также [26], что энергичное перемешивание закалочной среды препятствует образованию паровых пузырей и делает более интенсивным отвод теплоты конвекцией. С другой стороны, в некоторых работах, посвященных расчету температурных полей при охлаждении [39], высказывается предположение, что учитывая пузырьчатую стадию теплообмена, можно при определенных (не малых) скоростях потока добиться лучшего согласия результатов расчета с экспериментом.

Таким образом, вопрос о том, в какой мере можно пренебречь стадией пузырьчатого кипения при заданных для закалки скоростях поверхностного охлаждения образцов, требует специального изучения, во всяком случае, технолог не может дать уверенный ответ на вопрос о том, какой закон теплообмена (или их комбинацию) следует выбрать при конкретных технологических условиях (вещество жидкости, скорость потока и т. п.). Значит, функцию  $\dot{H}(t)$  для охлаждения также следует считать неизвестной. Для ее определения, наряду с искомым температурным полем, следует воспользоваться дополнительной о нем информацией, например о его распределении на поверхности образца  $\tilde{\varphi}(\tau)$ . Для этой цели должен быть проведен специальный эксперимент по измерению температуры поверхности в условиях производства. В работе [69] использовались результаты такого эксперимента.

Наличие таких результатов позволяет поставить задачу пересчета  $\tilde{\varphi}(\varphi) \Leftrightarrow \dot{H}(t)$ , относящуюся к числу обратных типа ин-

терпретации данных эксперимента, и эта задача описывается операторным уравнением  $\tilde{\varphi} = A' \hat{H}$ , где  $A'$  — совокупность операций, определенных задачами охлаждения при заданной функции  $\hat{H}$  с последующей выборкой значений температуры на границе.

Подчеркнем еще раз, что эта задача должна быть решена до реализации второго этапа математического моделирования на основе специальной информации, полученной в эксперименте, спланированном совместными усилиями технолога и математика.

Наконец, приводимые в таблицах зависимости физических параметров материала от температуры и других переменных устанавливают обычно экспериментально в медленных (квазистационарных) процессах, сравнительно легко реализуемых. Учитывая молекулярную природу температуры, нет оснований утверждать, что при быстрых процессах, каким является, в частности, охлаждение приповерхностных слоев образца при закалке, температурные зависимости теплофизических характеристик не претерпевают существенных отклонений от представленных на рис. 3.2. Следовательно, коэффициенты дифференциального уравнения (3.2) лишь условно можно считать заданными. Строго говоря, они также подлежат определению и для стадии быстрого охлаждения.

Если рассматривать эту задачу наряду с предшествующей, то температуры поверхности уже недостаточно для определения всей совокупности параметров и нужны дополнительные сведения о температурном поле, например поведение температуры внутри образца (но в области быстрого охлаждения) и, возможно, тепловые потоки как функции времени. Эта информация — также предмет специального эксперимента, который нельзя, очевидно, спланировать без тесного контакта математика и технолога.

Задача об определении теплофизических характеристик ( $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$ ) как функций температуры по указанной косвенной информации также относится к числу обратных задач типа интерпретации. В теоретическом плане возможности использования различной информации для математического определения этих параметров рассматривались в работах [57, 58].

Таким образом, с первым этапом математического моделирования реального технологического процесса закалки оказывается связанным ряд вспомогательных задач, которые, как и основная задача целевого управления процессом, относятся к числу обратных. Их решение является необходимым составным элементом формулировки окончательной рабочей модели процесса закалки. Такое решение невозможно без активной работы технолога, участвующего в построении адекватной реальности математической модели, что было отмечено во введении к нашей книге.

Рассмотрим последовательно методику и результаты решения некоторых из названных задач.

### 3.3. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСТОЧНИКА НАГРЕВА ПОД ЗАКАЛКУ ПО ЗАДАННОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ РЕЖИМУ НА ГРАНИЦЕ ОБРАЗЦА

#### 3.3.1. Корректная постановка задачи и различные подходы к ее решению

Очевидно, задача о поиске управляющей нагревом функции  $F(\tau)$ , в точности обеспечивающей граничный режим  $\varphi(\tau)$ , представленный на рис. 3.3, была бы поставлена некорректно:  $\varphi(\tau)$  — негладкая функция, а температурное поле (в частности, на поверхности образца) дифференцируемо по  $\tau$ .

Тем самым уравнение  $AF = \varphi$  является чисто условным, и в постановку задачи следует включить допуск  $\delta$  на отклонение от заданной функции  $\varphi$ . Обозначим для краткости через  $v[\tau, F]$  температуру поверхности образца при каком-либо заданном управлении  $F(\tau)$ , получаемую решением задачи (3.2). Примем за норму отклонения этой температуры от заданной  $\|v[\tau, F] - \varphi(\tau)\|$ , например, величину  $\max_{\tau \in [0, \tau_k]} |v[\tau, F] - \varphi(\tau)|$ . Тогда задача сводится к поиску  $F(\tau)$  удовлетворяющей неравенству

$$\|v[\tau, F] - \varphi\| \leq \delta. \quad (3.3)$$

В отличие от задач интерпретации, в этом случае приемлема любая функция  $F(\tau)$ , удовлетворяющая этому неравенству и некоторым условиям реализации. В качестве таковых можно принять требование плавности ее изменения, иначе говоря, ограниченности вместе с производной  $F(\tau) \in Z$ , где  $Z$  — множество управлений, обладающих указанным свойством. Заданный алгоритм решения такой задачи приведет к единственному результату (одному из возможных).

Один из подходов к построению алгоритма основан на том, что искомая функция  $F(\tau)$  представляет собой значение магнитного поля на поверхности образца, удовлетворяющего дифференциальному уравнению на конечном по  $\tau$  сегменте  $[0, \tau_k]$ . Решение такого уравнения, даже при наличии особенностей в поведении коэффициентов последнего в окрестности точки Кюри (см. рис. 3.2), обладает свойствами, при которых его граничное значение  $F(\tau)$  заведомо принадлежит указанному классу  $Z$  [47].

С другой стороны, обеспечить неравенство (3.3) можно, подчинив температуру поверхности требованию  $v[\tau, F] \equiv t(R, \tau) = \tilde{\varphi}(\tau)$ , где  $\tilde{\varphi}(\tau)$  — сглаженная в окрестности угловой точки функция  $\varphi$  (в результате чего она может представлять температуру на поверхности образца) и удовлетворяющая условию  $\|\tilde{\varphi}(\tau) - \varphi(\tau)\| \leq \delta$ .

С учетом последнего краевого условия и гладкости  $\tilde{\varphi}(\tau)$ , можно рассматривать систему уравнений для совместного опреде-

ления  $t(r, \tau)$  и  $w(r, \tau)$ , включающую два уравнения из (3.2) с соединенными к ним следующими дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} t|_{\tau=0} &= t^*, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \hat{H}(t) (\tilde{\varphi}(\tau) - t^*); \\ w|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{0,12}{\sigma} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \Big|_{r=R} = c(\tilde{t}) \varphi(\tilde{t}) \tilde{\varphi}'(\tau) - \lim_{r \rightarrow R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

Последнее условие является следствием уравнения для  $t$  при  $t(R, \tau) = \tilde{\varphi}(\tau)$  и обеспечивает принадлежность  $\tilde{\varphi}(\tau)$  граничному значению температуры  $\tilde{t} = \tilde{\varphi}(\tau)$ . Это условие рассматривается как краевое для определения  $w(r, \tau)$ , и тогда после решения уравнения с условиями (3.4) находим  $F(\tau) \equiv w(R, \tau)$ .

Такой подход к построению алгоритма соответствует условно-корректной по Тихонову постановке задачи, которая в данном случае является эффективной и в вычислительном отношении, благодаря возможности конечно-разностных методов.

В силу нелинейности уравнений и дополнительного условия для решения задачи может быть использован некоторый итерационный процесс, при котором на каждой итерации краевые задачи для  $t$  и  $w$  решаются последовательно и раздельно. Конечно-разностные методы реализуются в рамках этого процесса независимо для каждой из названных задач.

Применение разностных методов в итерационном цикле (см. гл. 1) приводит каждую из задач к системе линейных алгебраических уравнений. При этом предел в последнем из условий (3.4) также аппроксимируется «допредельным» выражением, содержащим значения функции (на предшествующей итерации) в трех приграничных узлах.

Описанная совокупность методов [24], включая и метод решения полученной системы уравнений, составляет в данном случае регуляризирующий алгоритм для решения поставленной задачи управления. В данном случае, в соответствии с концепцией введения задачи в класс корректности, он совпадает с алгоритмом решения некоторой задачи прямого моделирования.

Другой возможный подход к построению регуляризирующего алгоритма основан на вариационных постановках, когда функция  $F(\tau)$  выбирается таким образом, чтобы она минимизировала некоторый функционал. При этом принадлежность ее выбранному выше множеству  $Z$  либо должна задаваться явными количественными ограничениями, либо обеспечиваться автоматически выбором функционала [86].

Преимущество вариационных постановок состоит, в частности, в том, что отпадает необходимость предварительного сглаживания

заданной температуры поверхности. При таких постановках наиболее простые по структуре алгоритмы получаются, если в качестве нормы уклонения температуры поверхности от желаемой ( $\varphi(\tau)$ ) выбрать величину, отличную от введенной выше, а именно

$$\|v[\vartheta, F] - \varphi(\tau)\|^2 \equiv \int_0^{\tau_k} \{v[\vartheta, F] - \varphi(\tau)\}^2 d\tau. \text{ Наиболее эконо}$$

номичным из универсальных оказывается алгоритм минимизации сглаживающего функционала Тихонова, который с учетом введенных ограничений на  $F(\tau)$  при условии, что  $F(0) = 0$ , имеет вид

$$\|v[\vartheta, F] - \varphi(\tau)\|^2 + \alpha \int_0^{\tau_k} [F'(\tau)]^2 d\tau (\alpha > 0).$$

Очевидно, функция, минимизирующая этот функционал, зависит еще от параметра  $\alpha$ :  $F = F_\alpha(\tau)$ , а последний можно выбрать по условию  $\|v[\vartheta, F_\alpha] - \varphi\|^2 \leq \delta^2$ . Известно [86], что при таком выборе  $\alpha = \alpha(\delta)$  получается наиболее гладкая функция из числа удовлетворяющих условию (3.3) и условию  $F(0) = 0$  (при интегральной норме и соответственном изменении величины допуска).

Однако при вариационном подходе прямую задачу (3.2) приходится решать многократно, и потому возникает необходимость по возможности экономизировать процедуру минимизации.

Это можно сделать модификацией вариационной постановки, основанной на эволюционном характере процесса в рамках того же общего подхода.

### 3.3.2. Пошаговый регуляризирующий алгоритм поиска управляющей функции

Разобьем время, в течение которого происходит нагрев, включая стадию изотермической выдержки, на столь большое число частей  $m$ , чтобы в условиях реального управления процессом функция  $F(\tau)$  хорошо аппроксимировалась ступенчатой. Соответственно получим последовательность временных промежутков:

$$\Delta_k \equiv [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \text{ причем } \tau_0 = 0.$$

На каждом из этих промежутков будем считать функцию  $F(\tau)$  постоянной  $F(\tau) = F_{k+1}$ , если  $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ .

Под влиянием такого управления температура  $t$  будет меняться со временем непрерывным образом, и можно считать, что на очередном промежутке  $t = t_{k+1}(r, \tau)$  определяется системой (3.2) при  $F = F_{k+1}$  и начальном условии  $t_{k+1}(r, \tau_k) = t_k(r, \tau_k)$ , где справа записана температура, достигнутая к моменту  $\tau_k$  на предшествующем временном промежутке. При любой заданной величине  $F_{k+1}$  расчет температурного поля при  $\vartheta \in [\vartheta_k, \vartheta_{k+1}]$  может быть про-

веден, например, с помощью конечно-разностных методов, а потому алгоритмически определена температура поверхности образца  $v_{k+1}[\tau, F_{k+1}]$ . Наконец, в качестве меры уклонения этой величины от заданной  $\varphi(\tau)$  примем

$$\|v_{k+1}[\tau, F_{k+1}] - \varphi(\tau)\|^2 \equiv \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \{v_{k+1}[\tau, F_{k+1}] - \varphi(\tau)\}^2 d\tau,$$

а интегральным допуском будем считать величину  $\delta_{k+1} = \delta/\sqrt{m}$ .

Теперь дело сводится к выбору ограничений на  $F_{k+1}$  ( $k \neq 0$ ) для каждого очередного промежутка, соответствующих условию максимальной гладкости аппроксимируемого непрерывного управления. Понятно, что таким ограничением является требование минимального уклонения  $F_{k+1}$  от  $F_k$ . Поскольку, с другой стороны, для непрерывного управления  $F(0) = 0$ , то для  $F_1$  естественно принять требование минимального уклонения от нуля.

Практически такая модификация вариационной постановки задачи управления нагревом означает следующее. Если очередная константа разыскивается с помощью выборки из некоторой минимизирующей последовательности (а обычно вариационные задачи решаются именно так), то первым членом этой последовательности следует взять  $F_k$  (соответственно число 0 для первого промежутка).

В качестве минимизирующей можно взять итерационную последовательность  $\{F^{(s)}\}$ , получаемую по методу Ньютона—Гаусса [23], т. е. с помощью линеаризации граничной температуры в окрестности очередного приближения  $F^{(s)}$ . Для этого вводится численный аналог производной температуры границы на очередном промежутке по управляющей константе  $F$  в точке  $F^{(s)}$ :

$$w(\tau) = \frac{\varphi[\tau, F^{(s)}(1 + \Delta)] - \varphi[\tau, F^{(s)}]}{F^{(s)} \Delta}.$$

Тогда уклонение  $\|v_{k+1}[\tau, F] - \varphi(\tau)\|^2$  оказывается квадратичной функцией от очередной итерации  $F = F^{(s+1)}$  и его дифференцирование по  $F$  приводит к явному выражению для минимизирующей последовательности:

$$F^{(s+1)} = F^{(s)} - \frac{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \{v[\tau, F^{(s)}] - \varphi(\tau)\}^2 d\tau}{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} w^2(\tau) d\tau} \quad (s = 0, 1, \dots). \quad (3.5)$$

В этой последовательности  $F^{(0)} = F_k$ , уже известной величине, а в качестве искомой  $F_{k+1}$  принимается первое из тех значений  $F^{(s+1)}$ , для которых выполнено требование  $\|v_{k+1}[\tau, F^{(s+1)}] - \varphi(\tau)\|^2 \leq \delta_{k+1}^2$ , играющее тем самым роль условия прерывания.

В соответствии с общей терминологией рассмотренный процесс получения ступенчатого управления, математически обоснованный в работе [23], следует отнести к адаптивным регуляризирующим алгоритмам (РА), поскольку он основан на специфике эволюционных уравнений.

Оказывается, что всюду, за исключением окрестности точки Кюри, такой процесс не требует более двух итераций на каждом шаге по времени, а потому он сопоставим по экономичности с методом решения прямой задачи о расчете температурного поля, вызванного тем же управлением.

В свою очередь, температурное поле, управляющее нагревом под закалку, определяется параллельно с  $F(\tau)$  и повторных расчетов не требует.

Отметим также, что изложенный алгоритм оказывается применимым и к другой обратной задаче, сопутствующей формулировке модели процесса (см. п. 3.2), и в этом также его преимущество.

### 3.3.3. О сведении краевой задачи к системе линейных алгебраических уравнений

Для расчета температурного поля для каждого приближения  $F_{k+1}^{(s)}$  на каждом очередном сегменте  $\Delta_k$  (в том числе и результирующего поля) рационально использовать неявную однородную конечно-разностную схему.

Соответствующая алгебраическая система уравнений может быть получена в результате разбиения каждого временного сегмента  $\Delta_k$  дополнительно на  $N$  равноотстоящих слоев точками:  $\tau_j = \tau_k + j\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau = [(\tau_{k+1} - \tau_k)/N]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ; в результате с искомыми функциями  $(t(r, \tau), \omega(r, \tau))$  сопоставляется множество функций  $\{t^j = t(r, \tau_j), \omega^j = \omega(r, \tau_j)\}$ , подвергающихся затем последующим аппроксимациям, вследствие которых и получается конечно-разностная схема. Явная схема получилась бы, если целью аппроксимаций было бы поставлено явное выражение  $(t^j, \omega^j)$  через их значения на предшествующем слое, что часто делается в инженерных расчетах [75]. К неявной схеме приходится, если целью аппроксимаций сделать получение системы уравнений относительно  $(t^j, \omega^j)$ , не разрешаемых в явном виде, откуда затем и определять их с помощью специального алгоритма. Неявная схема, несмотря на кажущуюся громоздкость, обладает тем преимуществом перед явной, что для задач рассматриваемого вида свободна от эффекта накопления ошибок от слоя к слою, независимо от величины шага  $\Delta\tau$ , т. е. является абсолютно устойчивой. В отличие от этого явная схема оказывается устойчивой лишь при достаточно малых  $\Delta\tau$ , что увеличивает время счета.

Понятне однородности схемы относится уже к аппроксимирующей схеме. Дальнейшую аппроксимацию проведем, введя «сетку» значений по радиусу  $r_l = [l - (1/2)]\Delta r$ ,  $\Delta r = [R/(M - 1/2)]$ ,  $l = 1, 2, \dots, M$ . Тогда паре функций  $(t^j, \omega^j)$  при каждом  $j$  будет сопоставлено множество их значений в узлах такой сетки  $\{t_l^j, \omega_l^j\}$ . Именно эти значения и подчиняются затем системе алгебраических уравнений. Схема называется однородной в том случае, если во всех узлах сетки, не считая граничных, уравнения имеют один и тот же вид. Построение таких схем, удобство которых для расчета очевидно, требует специального внимания тогда, когда коэффициенты исходной дифференциальной системы разрывны либо имеют иные особенности. (В нашей задаче некоторые из них имеют разрывные производные в окрестности точки Кюри, положение которой явно не определено в координатах  $(r, \tau)$ ).

Не останавливаясь на интегроинтерполяционном методе [73] получения соответствующих формул, примем следующие приближенные выражения для коэффициентов уравнений системы (3.2) в узлах  $r_l$  введенной сетки на любом временном слое:  $a_l(t) = (r_l/2)(\lambda_l + \lambda_{l-1})$ , где  $\lambda_l = \lambda(t_l)$ ;  $b_l(t) = (r_l/2) \times (\rho_l + \rho_{l-1})$ , где  $\rho_l = \rho(t_l)$ ;  $\mu_l = \mu(t_l)$ ,  $c_l = c(t_l)$ ,  $\gamma_l = \gamma(t_l)$ . В соответствии с заменой пары  $(t, \omega)$  множеством значений этих функций в узлах сетки — сеточными функциями  $(\bar{t}, \omega)$  — все производные в уравнениях системы (3.2) и граничных условиях заменяются разностными отношениями.

В результате, интересующая нас алгебраическая система уравнения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{l, l+1}(\bar{t}, \omega) \equiv & \frac{1}{r_l (\Delta r)^2} [a_{l+1}(t^{j+1})(t_{l+1}^{j+1} - t_l^{j+1}) - \\ & - a_l(t^{j+1})(t_l^{j+1} - t_{l-1}^{j+1})] + 0,12\rho_l^{j+1} \left| \frac{\omega_{l+1}^{j+1} - \omega_l^{j+1}}{\Delta r} \right|^2 - \\ & - (c_l)^{j+1} \frac{1}{\Delta \tau} (t_l^{j+1} - t_l^j) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{l, l+1}(\bar{t}, \omega) = & \frac{1}{r_l (\Delta r)^2} [b_{l+1}(t^{j+1})(\omega_{l+1}^{j+1} - \omega_l^{j+1}) - \\ & - b_l(t^{j+1})(\omega_l^{j+1} - \omega_{l-1}^{j+1})] + i\omega(\mu\omega)_l^{j+1} - \varepsilon \frac{1}{\Delta \tau} \times \\ & \times [(\mu\omega)_l^{j+1} - (\mu\omega)_l^j] = 0. \end{aligned}$$

В этих формулах для дальнейшего описания алгоритма введены краткие обозначения уравнений в каждом узле  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$ , а также параметр  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = 0$  либо  $\varepsilon = 1$  в зависимости от того, учитывается или (в приближенном варианте) нет последний член второго уравнения. К полученной системе добавляется аппроксимация граничных условий на любом временном слое: при  $r = 0$   $t_0 = t_1$ ,  $\omega_0 = \omega_1$  (сдвиг радиальной сетки на полшага был сделан для удобства аппроксимации производных по радиусу); при  $r = R$  и в предположении, что коэффициент теплообмена  $\hat{H}$  можно принять равным нулю,  $t_{M+1} = t_M$ ,  $\omega_M = F_k$  ( $k$  — по-прежнему номер временного интервала  $\Delta t_k$ ). Начальное условие, очевидно, имеет вид  $t_l^{(0)} \equiv t_l^*$ ,  $\omega_l^{(0)} \equiv 0$ .

Неявный характер схемы выражается в том, что почти все неизвестные отнесены к временному слою с номером  $(j+1)$ , можно было бы лишь одну группу неизвестных  $(t_l^{j+1}, \omega_l^{j+1})$ , входящую в последнее слагаемое обоих уравнений, отнести к указанному слою, а все прочие неизвестные — к предшествующему  $j$ -му. Тогда каждое уравнение разрешалось бы явно относительно  $t_l^{j+1}$  или  $\omega_l^{j+1}$ . Но такая схема, как отмечалось выше, была бы лишь условно-устойчивой, что неудобно при автоматизированных расчетах.

То обстоятельство, что  $\omega$  и соответствующие уравнения комплексны, не приводит к затруднениям поскольку на современных ЭВМ допустимы операции с комплексными величинами. Важнее другое.

Полученная с присоединением дополнительных условий система уравнений оказывается нелинейной, вследствие зависимости их коэффициентов от  $\bar{t}$ , и к тому же содержащей значительное число уравнений. Поэтому необходимо сформулировать алгоритм ее приближенного решения. Он содержит две универсальные операции.

Для преодоления нелинейности вводится процесс последовательных приближений, действующий при переходе от  $j$ -го временного слоя к следующему,

для любого  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Пусть уже найдены значения  $(\tilde{r}^j, \psi^j) \equiv \{t_j^r, \omega_j^r\}$  (для  $j = 0$  они задаются начальными условиями). Последовательные приближения  $(\tilde{r}_{(p)}, \psi_{(p)})$  ищем в следующем порядке.

Полагаем  $\tilde{r}_{(0)} = \tilde{r}^j$  и  $\psi_{(0)} = \psi^j$  и решаем систему  $\hat{M}_{1,1}(\tilde{r}_{(0)}, \psi) = 0$ ; ее решение принимаем за  $\psi_{(1)}$ . Подставляем найденное значение в первую систему, в коэффициентах которой в качестве аргумента, также берем  $\tilde{r}_{(0)}$ . Обозначим выражение  $\tilde{L}$  с такой подстановкой через  $\tilde{L}$ , тогда решается система  $\tilde{L}_1(\tilde{r}, \psi_{(1)}) = 0$  и ее решение принимается за  $\tilde{r}_{(1)}$  — первое приближение к температурному полю. Далее эти две операции повторяются. Каждый раз обе системы решаются независимо при очередном значении  $\tilde{r}_{(p)}$  в аргументах коэффициентов. При этом сначала решается система  $\hat{M}_1(\tilde{r}_{(p)}, \psi) = 0$ , откуда находится  $\psi_{(p+1)}$ , затем система  $\tilde{L}(\tilde{r}, \psi_{(p+1)}) = 0$ , приводящая к  $t_{(p+1)}$ . Описанный итерационный процесс заканчивается по условию шага  $|t_{(p+1)} - t_{(p)}| \leq \epsilon_1 \max |t_{(p+1)}|$ , где  $\epsilon_1$  — заданная относительная погрешность вычислений (например,  $\epsilon_1 = 10^{-3}$ ). Иначе говоря, условие окончания процесса — достаточная неразличимость двух последовательных приближений температурного поля. При выполнении этого условия  $\tilde{r}_{(p+1)}$  принимается за  $\tilde{r}^{j+1}$ .

Следующая универсальная операция — это метод решения каждой из двух систем на любом шаге процесса последовательных приближений. На каждом таком шаге рассматриваемые системы уже линейны и имеют трехдиагональные матрицы. В этом случае решение каждой из них легко получается методом прогонки по [73], широко используемым при решении аппроксимированных краевых задач. На его описании здесь не останавливаемся.

Система (3.2) допускает упрощения, позволяющие несколько сократить машинное время, требуемое для решения задачи об определении характеристики источника температурного поля. Прежде всего, учитывая относительно высокие частоты в рассматриваемой задаче ( $f = 1 \div 8$  кГц), можно пренебречь релаксационным членом в уравнении для амплитуды магнитного поля (модель II). Это соответствует квазистационарному режиму источника индукционированного температурного поля и находит подтверждение математической теории малого параметра для дифференциальных уравнений. Подтверждением такой возможности служат и приведенные ниже результаты проведенных авторами математических экспериментов, в которых расчет температурного поля проводился как для точного, так и для приближенного уравнения.

В свою очередь, для такого квазистационарного режима и с учетом того, что температура меняется мало на достаточно малом временном интервале, можно приближенно считать коэффициенты уравнения для амплитуды магнитного поля постоянными в промежутке между двумя временными слоями. Но при этих условиях второе уравнение системы (3.2) допускает аналитическое решение, которое дается формулой, подобной принятым в обычных инженерных расчетах:

$$\omega(r, \tau) \cong F(\tau) \frac{J_0(vr\sqrt{i})}{J_0(vR\sqrt{i})},$$

где  $v = \sqrt{\omega\sigma}$ , а  $\tau$  входит как параметр. Это приводит к следующему явному выражению для плотности индуцированного тока (модель III):

$$j_{\omega\Phi}^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial r} \right|^2 = F^2(\tau) \left| \frac{J_1(vr\sqrt{i})}{J_0(vR\sqrt{i})} \right|^2. \quad (3.7)$$

Здесь  $J_0(x\sqrt{i})$ ,  $J_1(x\sqrt{i})$  — функции Бесселя нулевого и первого порядка, зависящие от комплексного аргумента специального вида; для этих функций (их действительных и мнимых частей) имеются таблицы [94] и стандартные программы для ЭВМ.

Назовем исходную постановку задачи (система (3.2)) моделью I. На рис. 3.4 представлены результаты расчета  $j_{\omega\Phi}$  для трех описанных выше моделей магнит-

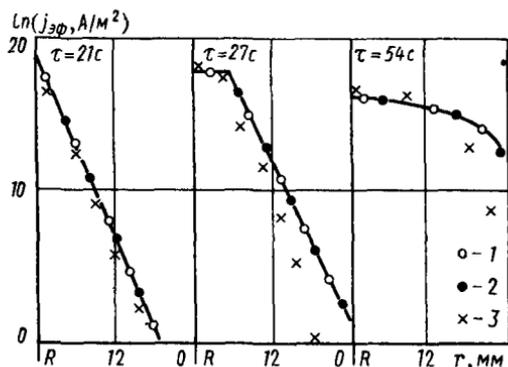


Рис. 3.4. Распределение плотности тока по сечению образца для трех моделей магнитного поля:

1 — модель I; 2 — модель II; 3 — модель III

ного поля при следующих параметрах образца и режима нагрева: материал сталь 40, радиус образца  $R = 24$  мм, температура изотермы  $t_{из} = 870$  °С, циклическая частота тока  $\omega = 2\pi f = 2,5$  кГц для различных моментов времени  $\tau$ , при этом последние два момента, указанные на рисунке, соответствуют состоянию поверхности после перехода через точку Кюри. Видно, что приближенное аналитическое выражение поля дает, в отличие от квазистационарной модели, более заметное отклонение от точного. Естественно, что это отклонение возрастает с ростом радиуса. Однако возможны ситуации, когда на такое «загрубление» можно пойти ради упрощения и без того сложной модели, описывающей совокупность процессов и с учетом степени достоверности существующей информации о параметрах: это модели термопластического состояния в процессе индукционного нагрева в том или ином технологическом процессе.

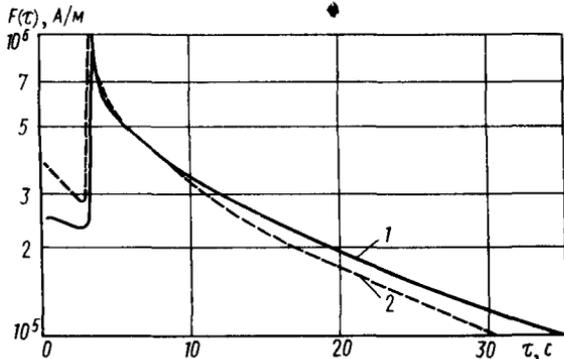
Если принять такую максимально упрощенную модель, то в аппроксимирующей алгебраической системе (3.6) пропадает вторая группа уравнений, а последний, зависящий от  $\omega$ , член первой группы дается явным выражением (3.7). В этом случае описанный выше процесс последовательных приближений относится лишь к оставшимся уравнениям и связан только с подстановкой в аргументы коэффициентов очередного приближения  $f(p)$ .

### 3.3.4. Результаты решения задачи управления нагревом под закалку

С помощью описанного выше (см. п. 3.3.2) алгоритма можно получить, прежде всего, зависимость амплитуды управляющего магнитного поля, пропорциональной ей амплитуды тока в индукторе от времени. Эта информация может быть полезной для реального управления процессом, в котором обеспечивается нужный температурный режим поверхности образца. В частности, она может быть использована и в режиме автоматического управления при наличии соответствующей техники.

Характерное поведение  $F(\tau)$  для стали 40 и армко-железа, полученное на ЭВМ, представлено на рис. 3.5 непрерывными кривыми, аппроксимированными при расчетах ступенчатыми кривыми с числом звеньев  $n = 270$ . Наблюдаемый на кривых пик соответствует переходу состояния материала образца в приповерхностных слоях через точку Кюри с потерей магнитных свойств. Впоследствии для магнитного поля (тока в индукторе) характерен монотонный спад, что обеспечивает компенсацию эффектов прямого

Рис. 3.5. Магнитное поле на поверхности образца из стали 40 (1) и армко-железа (2) при нагреве ( $R = 20$  мм;  $t_{\text{н}} = 4$  с;  $t_{\text{нв}} = 850$  °С;  $f = 2,4$  кГц)



нагрева токами Фуко и теплоотода в глубь образца за счет теплопроводности.

Впрочем эффективность регуляризирующего алгоритма в рассматриваемой задаче подтверждается и экспериментальными оценками и, прежде всего, результатами математического эксперимента.

Зададимся управляющей функцией  $F(\tau)$  для образца из стали 40 (рис. 3.6). Решение на ЭВМ прямой задачи дает функцию  $\varphi(\tau)$ , представленную на рис. 3.7. Приняв  $\varphi(\tau)$  за допустимую характеристику температурного режима на поверхности, восстановим с помощью нашего алгоритма при  $\delta_n = \delta/\sqrt{n}$ ,  $\delta_n \approx 10^{-1}$ ,  $n = 270$  на сегменте  $0 \leq \tau \leq 34$  с управляющую функцию  $F(\tau)$ . Результаты представлены точками на рис. 3.6 и говорят сами за себя.

Косвенной проверкой результата, а по итогам математического эксперимента и проверкой адекватности реальному процессу принятой теперь математической модели нагрева под закалку является сопоставление рассчитанных температурных полей с имеющимися данными физического эксперимента. Такие данные были получены с помощью термпар, впаянных в образец с торца на большую глубину. При этом термпары располагались на четырех различных радиусах. На рис. 3.8 приведена схема эксперимента по измерению температурного поля. Результаты измерения поля в

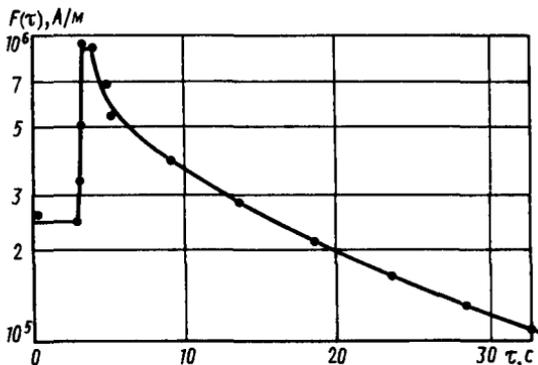


Рис. 3.6. Магнитное поле на поверхности образца из стали 40 ( $R = 20$  мм,  $t_{\text{н}} = 4$  с,  $t_{\text{нв}} = 850$  °С,  $f = 2,4$  кГц):  
— заданное; ● — восстановленное

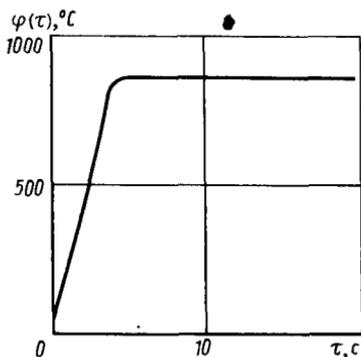


Рис. 3.7. Температура поверхности

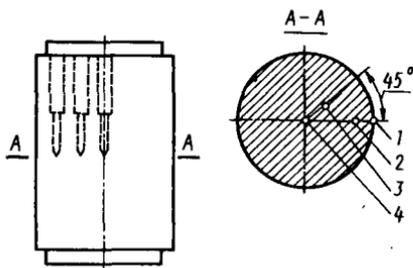


Рис. 3.8. Образец для исследования процесса закалки:

1—4 — термопары

динамическом режиме фиксировались с помощью осциллографа. Погрешность проведенных измерений и обработки составляла порядка  $10\text{--}20^\circ\text{C}$ .

Следует отметить [69], что организация подобного эксперимента достаточно сложна; она проводилась в порядке специального изучения распределения температурных полей в закаливаемых образцах, и такой эксперимент не может служить датчиком теплового состояния при поточном производстве деталей, в отличие от метода математического моделирования, применяемого в настоящей работе.

Результаты сопоставления показаны для образца стали 40 диаметром 48 мм при частоте тока в индукторе 2,5 кГц для некоторого режима закалки. На рис. 3.9 сплошными кривыми изображены результаты расчетов температурного поля для тех радиусов, для которых имеются экспериментальные данные:  $r = R$  (поверхность),  $r = 16,5$  мм,  $r = 9$  мм,  $r = 0$  (центр образца); штриховыми — экспериментальные значения. Видно, что различие между кривыми на всех радиусах не превосходит  $20^\circ\text{C}$ , т. е. укладывается

в пределы погрешности эксперимента.

Результаты сопоставления приводят к выводу, что принятая физико-математическая модель процесса согласуется с экспериментальными данными.

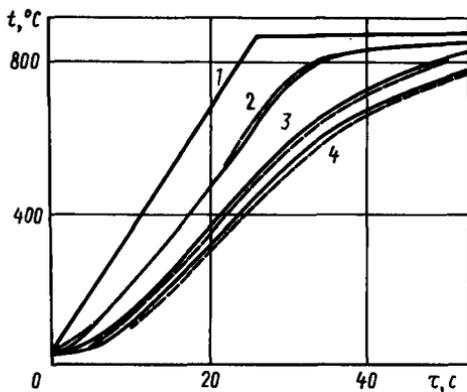


Рис. 3.9. Температурное поле в образце из стали 40 ( $\tau_{\text{н}} = 27$  с,  $t_{\text{нв}} = 870^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{в}} = 28$  с,  $f = 2,5$  кГц):

— расчетные данные;  
 - - - экспериментальные данные;  
 1 —  $r = R$ ; 2 —  $r = 16,5$  мм;  
 3 —  $r = 9$  мм; 4 —  $r = 0$

### 3.4. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ТЕПЛООБМЕНА И КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ БЫСТРОМ ОХЛАЖДЕНИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗЦА

#### 3.4.1. Использование данных о температурном поле на поверхности при постановке задачи о законе теплообмена

Закон теплоотдачи при быстром охлаждении условились выше характеризовать функцией  $\hat{H}(t)$ , где температура, фигурирующая в качестве аргумента, относится к точке поверхности  $t = t(R, \tau)$ .

Если эта температура известна как дополнительная информация о температурном поле, определяемом после отключения источников нагрева теплоотдачей с поверхности, то можно использовать ее для определения закона теплообмена. Это одна из задач интерпретации данных поверхностных наблюдений. Естественно, что при постановке такой задачи все прочие физические параметры процесса предполагаются известными.

В работе [67] установлено, что такая задача при точных данных о температурном поле поверхности может иметь только одно решение. Простое доказательство этого факта вытекает из следующих соображений. Задача о совместном определении  $t(r, \tau)$  и  $\hat{H}(t)$ , равносильная интересующей нас, определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) &= c(t) \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (0 < r < R, \tau > \hat{\tau}_h); \\ t(r, \hat{\tau}_h) &= \hat{t}_h(r); \quad \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \\ -\lambda(t) \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} &= \hat{H}(t) (t|_{r=R} - t^*), \quad t|_{r=R} = \varphi(\tau), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\varphi(\tau)$  — заданная температура. Если исключить условие теплообмена, сохранив последнее из краевых  $t|_{r=R} = \varphi(\tau)$ , то приходим к задаче, решение которой определено однозначно, т. е. может существовать только одна функция  $t(r, \tau)$ , описывающая температурное поле в области  $0 \leq r \leq R$  при  $\hat{\tau}_h \leq \tau$  и заданной функции  $\varphi(\tau)$ . Но тогда однозначно определена и производная этого поля по радиусу и, значит, условие теплообмена на поверхности однозначно определяет искомую функцию  $\hat{H}(t) = -\lambda(\varphi(\tau)) \times \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} / (\varphi(\tau) - t^*)$  при условии, что  $\varphi(\tau) \neq t^*$ , что заведомо исключено в интересующем нас временном интервале протекания процесса. Таким образом, при точных входных данных решение поставленной задачи единственно.

При получаемых из эксперимента неточных данных  $\varphi = \bar{\varphi}(\tau)$  можно говорить о поиске некоторого приближения к точному

решению  $\tilde{H}(t)$ . Однако эту функцию уже нельзя определить непосредственно из условий задачи (3.8), решение которой может и не существовать, поскольку, вообще говоря,  $t|_{r=R} \neq \varphi(\tau)$ , если  $\tilde{\varphi}(\tau)$  негладкая функция. Кроме того, если даже решение задачи существует, его производная на поверхности может содержать большую погрешность, так что непосредственное вычисление  $\hat{H}(t)$  окажется неустойчивым по отношению к вариации  $\tilde{\varphi}(\tau)$ . Все это значит, что при неточных данных задача (3.8) оказывается поставленной некорректно.

Поскольку известно, что закон теплообмена описывается гладкой функцией аргумента  $t$ , то эти сведения об искомом решении можно использовать при корректной постановке задачи. Вариационная ее постановка в этом случае формально близка к той, что была предложена выше для задачи управления: из всех функций  $\hat{H}(t)$ , для которых выполнено неравенство типа (3.2), выбрать одну из наиболее гладких. Единственность выбора определится при этом заданным алгоритмом минимизации. Отличие этой постановки от данной выше состоит лишь в том, что величина  $\delta$  означает теперь меру погрешности измеренной на границе температуры; уклонение этой температуры от точного значения заведомо естественно задавать в «среднеквадратичной» норме. Соответственно если вычисляемую при каждой  $\hat{H}(t)$  температуру поверхности обозначить, как и раньше, через  $v[\tau, \hat{H}]$ , то множество, из которого выбирается максимально гладкое решение, задается неравенством

$$\int_{\hat{t}_k}^{\hat{T}} [v[\tau, \hat{H}] - \tilde{\varphi}(\tau)]^2 d\tau \leq \delta^2, \quad (3.9)$$

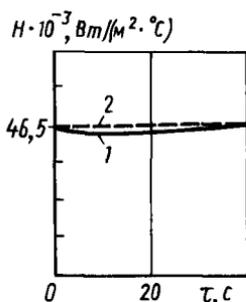
где  $\hat{T}$  — полное время закалки или его доля ( $\hat{T} > \hat{t}_k$ ).

### 3.4.2. Регуляризирующий алгоритм и результаты поиска закона теплообмена

Поскольку температура поверхности при охлаждении пробегает все возможные значения в диапазоне  $t^* \leq t \leq \hat{t}_{из}$ , аргументом искомой функции можно считать именно эту температуру. Так как последняя известна, хотя и приближенно, как функция времени, то вместо  $\hat{H}(t)$  можно искать сложную функцию времени  $\hat{H}(\varphi(\tau)) \equiv \hat{H}(\tau)$ . Если  $\hat{H}(\tau)$  можно определить устойчивым образом, то тогда находится по  $\tilde{\varphi}(\tau)$  и функция  $\hat{H}(t)$  хотя бы исключением аргумента  $\tau$  из табличного задания объема функций. Уместно вспомнить, что, в отличие от рассмотренной задачи управления, задачи об определении параметров модели решают лишь однажды до проведения математического моделирования.

Рис. 3.10. Коэффициент теплообмена при охлаждении образца из стали 40:

1 — решение обратной задачи; 2 —  $\tilde{H} = \text{const} = 46,5 \times 10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$



При таком подходе задача становится аналогичной задаче управления при нагреве: по заданной функции времени определяется другая, причем обе относятся к поверхности образца. Для решения задачи может быть использован сформулированный выше пошаговый регулирующий алгоритм. В соответствующем его описании (3.5) символ  $F$  надо заменить лишь символом  $\tilde{H}$ .

На рис. 3.10 представлен графически результат решения задачи, характерный для диапазона значений параметров материалов и технологического процесса в условиях производства ПО ЗИЛ. Приводимая иллюстрация относится к образцу из углеродистой стали 40 радиусом  $R = 24 \text{ мм}$  при  $t_n = 27 \text{ с}$ ,  $t_{\text{нв}} = 870 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $f = 2,5 \text{ кГц}$ . Можно видеть, что полученная, естественно с погрешностями, кривая хорошо соответствует горизонтали  $\tilde{H} = \text{const}$  (для указанных параметров  $\tilde{H} = 46,5 \cdot 10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ). Результаты косвенной проверки правильности выбираемой таким образом модели приведены на рис. 3.11, где для различных выдержек сопоставляются рассчитанные при конвективном теплообмене температурные поля с экспериментальными, взятыми из упомянутых выше источников.

Следует особо обратить внимание на то, что выверка согласованности модели с данными физического эксперимента на этом этапе, как и на предыдущем, явилась следствием тесного сотрудничества математиков с технологической группой.<sup>1</sup>

Расчет коэффициента теплообмена проведен, как отмечалось вначале, при конкретной информации относительно изменения теплофизических параметров материала при быстром охлаждении. Именно принята за истину гипотеза, высказываемая в работах [7, 26] относительно «замораживания» значений теплофизических характеристик материала в этом процессе вплоть до температуры мартенситного превращения на уровне тех значений, которые они имели в момент окончания фазы нагрева (т. е. на уровне или выше  $A_{c8}$ ). Поскольку при рассматриваемой технологии до такой температуры прогреты и достаточно быстро охлаждаются лишь приповерхностные слои, то в наших расчетах указанная гипотеза принята лишь для этих слоев, тогда как характеристики нижележащих подчинены тем же температурным зависимостям, что и при нагреве (без учета теплоты фазовых превращений).

<sup>1</sup> Работа проведена совместно с канд. техн. наук И. Н. Шкляровым.

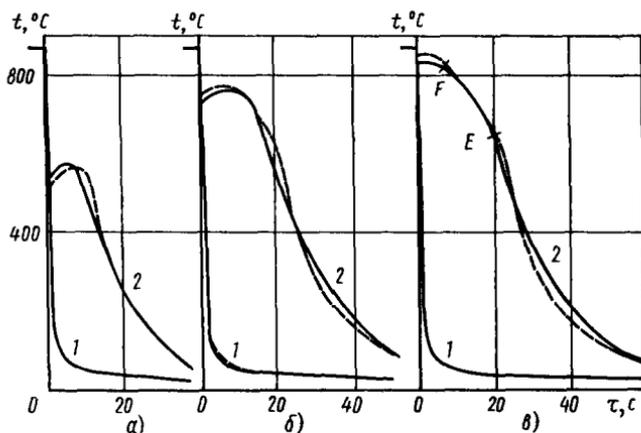


Рис. 3.11. Рассчитанное (————) и экспериментальное (---) температурное поле при охлаждении образца из стали 40 ( $R = 24$  мм,  $\tau_{\text{н}} = 27$  с,  $f = 2,5$  кГц,  $t_{\text{из}} = 870^\circ\text{C}$ ):

$a - \tau_{\text{в}} = 3$  с;  $b - \tau_{\text{в}} = 28$  с;  $v - \tau_{\text{в}} = 48$  с; 1 — на поверхности образца; 2 — на оси

Очевидно, модификация закона поведения теплофизических характеристик при быстром охлаждении может быть осуществлена программным путем. Для этого достаточно предписать ЭВМ рассматривать указанные характеристики как функции не только температуры  $t$ , в процессе охлаждения, но и начального состояния  $t(r, \hat{\tau}_{\text{к}})$  в момент окончания нагрева. Поскольку расчет проводится на сетке значений  $\{r_s\}$ , несложно ввести в программу сравнения  $t(r_s, \hat{\tau}_{\text{к}})$  с  $Ac_s$ , тогда для тех радиусов, где  $t(r_s, \hat{\tau}_{\text{к}}) \geq Ac_s$ , «срабатывает» автоматически принятая гипотеза.

### 3.4.3. Об использовании температурного поля на поверхности образца в качестве дополнительной информации для определения теплофизических параметров материала при быстром охлаждении

Проблема единственности решения задачи об определении теплофизических характеристик материала  $\lambda(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\gamma(t)$  по данным о температурном поле и тепловом потоке на поверхности изучалась в работах [57, 58] для более простых моделей — бесконечных пластин. Результаты этих работ дают, в частности, основание полагать, что по заданному на поверхности цилиндрического образца в процессе охлаждения температурному полю можно однозначно, при прочих известных параметрах, определить коэффициент теплопроводности  $\lambda = \lambda(t)$ .

В работе [57] проведен математический эксперимент по определению этой функции при известных  $c(t)$  и  $\gamma(t)$  и в предположении, что на поверхности происходит конвективный теплообмен со

средой, а первоначально цилиндр прогрет до постоянной температуры  $A_c$  на всю глубину.

Эта некорректная задача решалась на основе концепции «кварешения», т. е. с помощью минимизации уклонения рассчитанной температуры поверхности от измеренной и притом на специально выбранном компактном множестве функций.

В качестве компакта было выбрано множество квадратичных сплайнов с ограниченными производными. Такое название носит последовательность многочленов второй степени, каждый из которых определен на одном из последовательных промежутков  $\Delta_k \equiv [t_k, t_{k+1}]$  с условием, что в граничных точках промежутков сами многочлены и их производные имеют совпадающие значения. Геометрически квадратичный сплайн изображается непрерывной и гладкой кривой, причем на каждом сегменте  $\Delta_k$  это квадратичная парабола. Можно заметить, что множество таких сплайнов содержит и отрезок прямой (константу). Для построения такого сплайна на заданной в данной области  $t^* \leq t \leq t(r, \hat{r}_k)$ , исчерпывающей ее последовательности промежутков  $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $t_0 = t(r, \hat{r}_k)$ , достаточно задать значение искомого коэффициента  $\lambda$  в каждом узле  $\lambda_k = \lambda(t_k)$ , а в начальном узле также и значение производной  $\lambda'_0 = \lambda'(t_0)$ . Компактность множества обеспечивается неравенствами  $|\lambda'_0| \leq K$ ,  $0 < \lambda_k \leq K$ , где  $K$  — заданная константа. Таким образом, задача сводится к определению при указанном ограничении набора чисел  $\vec{p} \equiv \{\lambda'_0, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

На таком множестве минимизируемое уклонение становится

$$\text{функцией } N + 2 \text{ переменных: } \int_{t_k}^{\hat{r}} \{v[\tau, \vec{p}] - \tilde{\varphi}(\tau)\}^2 d\tau \equiv \Psi(\vec{p}).$$

Минимизация этой функции проводилась в работе [57] методом сопряженных градиентов [20] для небольшого  $N$  ( $N = 3$ ). Соответствующий алгоритм, применяемый в рамках изложенной постановки задачи, оказывается регуляризирующим по Тихонову алгоритмом [86]. Эффективность этого алгоритма была показана на «модельном» примере, где заранее известная параболическая функция воспроизводилась по рассчитанному по ней с погрешностями температурному полю поверхности. При обработке экспериментальных данных о температуре поверхности в предположении (подчеркнем еще раз) о конвективном теплообмене на поверхности образца  $\hat{H} = \text{const}$  регуляризирующий алгоритм привел к почти постоянному в рассматриваемом диапазоне температур значению  $\lambda(t)$ . Учитывая приближенный характер расчета, можно заключить, что получено косвенное подтверждение принятой выше гипотезы.

На сколько нам известно, в настоящее время нет расчетов по совместному определению совокупности параметров охлаждения  $H, \lambda, a, \varphi$ ; для этого требуется дополнительная информация о тем-

пературном поле и тепловых потоках. Однако проведенные расчеты дают опорные точки для постановки более широкого математического эксперимента по выверке модели на уровне решения прямых задач с выборкой параметров материала и процесса из заранее заданного множества. Ниже приведены результаты соответствующих расчетов на ЭВМ. Различные задания характеристик теплового состояния материала ( $\lambda, c, \gamma$ ) будем рассматривать как гипотезу относительно их поведения в процессе охлаждения. Гипотезой А назовем предположение о том, что при охлаждении та или иная характеристика ведет себя так же, как при нагреве; гипотеза Б соответствует «замораживанию» характеристики при быстром охлаждении.

Допустим сначала, что тепловые характеристики при скоростях охлаждения, отвечающих заданному поведению температуры поверхности, ведут себя так же, как и при нагреве. Решение задачи о законе теплообмена на поверхности с помощью РА в этом случае приводит к результату, представленному на рис. 3.12, а. Полученный закон теплообмена (кривая 1) не отвечает ни одному из законов, диктуемых возможными физическими условиями (кривая 3 — конвективный теплообмен, кривая 4 — пузырчатое кипение). С другой стороны, полученное при этом температурное поле внутри образца заметно (за пределами погрешности эксперимента) отличается от экспериментального (рис. 3.12, б).

Отсюда следует, что в рассматриваемом диапазоне скоростей охлаждения гипотеза А неверна и необходимо учитывать эффект скорости охлаждения при задании тепловых характеристик.

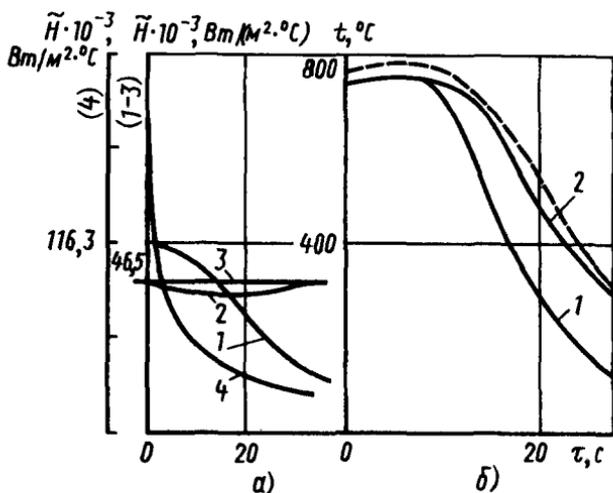


Рис. 3.12. Закон теплообмена  $\tilde{H}$  (а) и температура  $t$  на оси (б) образца из стали 40 при охлаждении ( $R = 24$  мм,  $\tau_n = 27$  с,  $f_{\text{нв}} = 870$  °С,  $\tau_n = 28$  с,  $f = 2,5$  кГц): — — — расчетные кривые; — — — экспериментальная кривая; 1 — гипотеза А для  $\lambda, c, \gamma$ ; 2 — гипотеза Б для  $\lambda, c, \gamma$ ; 3 — конвективный теплообмен; 4 — пузырчатое кипение на поверхности

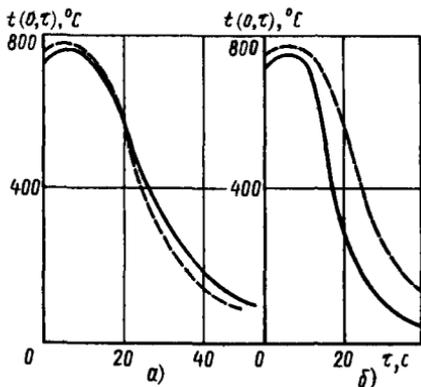


Рис. 3.13. Экспериментальная (---) и рассчитанная (—) температура на оси образца из стали 40 при охлаждении ( $R = 24$  мм,  $\hat{t}_H = 27$  с,  $\hat{t}_{из} = 870$  °С,  $\hat{t}_H = 28$  с,  $f = 2,5$  кГц)

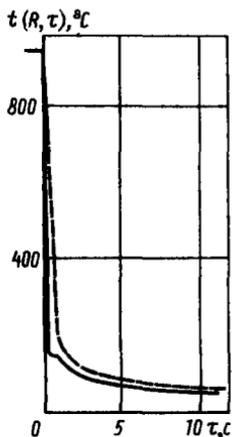


Рис. 3.14. Экспериментальная (---) и рассчитанная (—) температура поверхности образца из стали 40 при смешанном теплообмене — пузырьчатом кипении и конвективном теплообмене с  $H_0 = 46,5 \cdot 10^3$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С) ( $R = 24$  мм,  $\hat{t}_H = 27$  с,  $\hat{t}_{из} = 870$  °С,  $\hat{t}_H = 28$  с,  $f = 2,5$  кГц)

В предположении, что все характеристики удовлетворяют гипотезе Б, получаем хорошее совпадение с законом конвективного теплообмена (рис. 3.12, а, кривая 2). Поле в этом случае удовлетворительно совпадает с экспериментальным (рис. 3.12, б, кривая 2).

Естественно поставить вопрос о том, не могут ли другие сочетания гипотез относительно теплофизических характеристик и, с другой стороны, коэффициента теплообмена на поверхности привести к столь же хорошему совпадению с экспериментом, как и в расчетах, результаты которых приведены в п. 3.4.2, тогда соответствующие сочетания гипотез могли бы конкурировать с выводами, сформулированными выше.

Для этой цели достаточно поставить математический эксперимент по прямому расчету температурного поля при различных дополнительных гипотезах относительно тепловых характеристик и характере закона теплообмена.

Ниже приведены результаты такого эксперимента соответственно для следующих предположений:

1. Закон теплообмена конвективный;  $\lambda(t)$  удовлетворяет гипотезе Б;  $\sigma$ ,  $\varphi$  — гипотезе А.

2. Тот же закон теплообмена;  $\lambda$  удовлетворяет гипотезе А;  $\sigma$ ,  $\varphi$  — гипотезе Б.

3. Закон теплообмена смешанный: пузырьчатое кипение вначале с непрерывным (по тепловому потоку) переходом к конвективному теплообмену;  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  удовлетворяет гипотезе Б.

Результаты расчетов полей в первых двух случаях в сравнении с экспериментальными данными представлены на рис. 3.13, а, б соответственно. Видно, что невязка в полях, в частности в глубоких слоях образца, больше, чем при решении обратной задачи о теплообмене (при гипотезе Б); иначе, предположения 1 и 2 хуже согласуются с экспериментом. Вместе с тем (сравните рис. 3.12, б и 3.13, а, б), как и следовало ожидать, поведение  $\lambda = \lambda(t)$  больше влияет на температурное поле при быстром охлаждении, нежели две другие характеристики.

Для проверки состоятельности предположения 3 прежде всего определяем температуру поверхности образца  $t_{\pi}$ , при которой произойдет смена первой стадии второй. Значение  $t_{\pi}$  можно найти из условия непрерывности потока  $[-\lambda (\partial t / \partial r)]_{t_{\pi}} = 0$  (символ [ ] означает скачок потока — разность его «левого» и «правого» значений при  $t = t_{\pi}$ ). Для закона пузырьчатого теплообмена  $\dot{H}(t) = 3^n (t - t_s)^{n-1}$ , где  $n = 3,33$ ,  $t_s$  — температура насыщения [74], равная  $\sim 100^\circ\text{C}$ . Для конвективного теплообмена  $\dot{H} = H_0 = \text{const}$ . Отсюда  $t_{\pi}$  определяется формулой  $t_{\pi} = t^* + (3^n / H_0) (t_{\pi} - t_s)^n$ .

Решая затем задачу об охлаждении образца, в которой при температуре поверхности в интервале  $[t(R, \hat{r}_k), t_{\pi}]$  используется закон пузырьчатого кипения, а при меньшей температуре — закон конвективного теплообмена, приходим к результату, представленному на рис. 3.14. Проведенное здесь сравнение найденного температурного поля с экспериментальным обнаруживает их явное несовпадение даже на поверхности и свидетельствует о несоответствии предположения 3 реальному процессу.

Полученные результаты подтверждают вывод о том, что скорость охлаждения приповерхностных слоев при закалке образцов рассматриваемого типа является настолько быстрой, что тепловые характеристики в них подчиняются гипотезе Б и при этом закон теплообмена на поверхности образца определяется главным образом конвекцией.

Вместе с тем более широкая постановка математического эксперимента только подтвердила результаты, полученные при решении обратных задач интерпретации с помощью регуляризирующих алгоритмов.

Этим завершается выбор модели процесса быстрого охлаждения для рассматриваемой задачи.

Заметим, что поскольку и слои, прогретые на первой стадии закалки до температуры полного аустенитного превращения, содержат некоторый процент аустенита, принятая модель не является слишком точной. Тем не менее непротиворечивость ее экспериментальным данным свидетельствует о том, что эта модель правильно отражает основные черты процесса в рамках существующей погрешности эксперимента.

### 3.5. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОЙ ЗАКАЛКИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.5.1. Математический эксперимент по изучению температурного поля в динамическом режиме закалки

Завершение первого этапа математического моделирования — построение математической модели процесса закалки (см. п. 3.2—3.4), а также формулировка численного алгоритма для расчета температурных полей, в значительной мере сходного в обеих фазах технологического процесса, позволяет отобразить алгоритм в программе для ЭВМ и провести серию расчетов по заранее намеченному плану.

Такая серия расчетов заменяет, очевидно, постановку физических экспериментов по изучению зависимости температурных полей от различных параметров материала образцов и режима закалки. Можно сказать, что при каждом наборе параметров на ЭВМ воспроизводится технологический процесс без материального носителя.

Как уже отмечалось, температурное поле является управляющим фактором процесса фазовых превращений при закалке. Его расчеты были проведены на ЭВМ БЭСМ-6 по специально разработанной программе для образцов из сталей 20, 40, 45 и армко-железа [23] при различных радиусах образца  $R$  и параметрах режима закалки.

В качестве параметров режима закалки были приняты следующие:  $f$  — частота индукционного тока, Гц;  $\hat{t}_x$  — время нагрева, с;  $\hat{t}_{из}$  — температура изотермы при выдержке, °С;  $\hat{t}_в$  — продолжительность выдержки, с;  $H_0$  — коэффициент конвективного теплообмена при быстром охлаждении, Вт/(м<sup>2</sup>·°С). Очевидно, параметры  $\hat{t}_x$  и  $\hat{t}_{из}$  позволяют судить о скорости нагрева;  $H_0$ , значение которого отвечает различным скоростям потока омывающей жидкости и ее составу, является косвенной характеристикой скорости охлаждения поверхности.

Значения указанных параметров выбирались из диапазона, принятого при поверхностной закалке полуосей ведущих мостов грузовых автомобилей семейства ЗИЛ.

На рис. 3.15 изображены профили рассчитанных температурных полей для некоторых радиусов в сравнении с экспериментальными, полученными с помощью термопар в лабораторных условиях [69] для стали 40; удовлетворительно с учетом точности эксперимента совпадение еще раз свидетельствует о правильности выбранной модели тепловых источников.

Проведенный математический эксперимент позволяет прежде всего обнаружить определенные закономерности в динамике температурных полей и в зависимости их от параметров режима закалки. Результаты соответствующих «наблюдений» согласуются

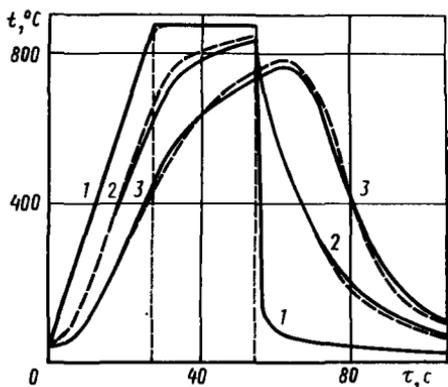


Рис. 3.15. Экспериментальное (—) и рассчитанное (---) температурное поле (Ст40,  $R=24$  мм,  $\hat{t}_H = 27$  с,  $\hat{t}_{\text{нв}} = 870$  °С,  $\hat{t}_H = 28$  с,  $f = 2,5$  кГц):  
 1 —  $r = R$ ; 2 —  $r = 16,5$  мм; 3 —  $r = 0$

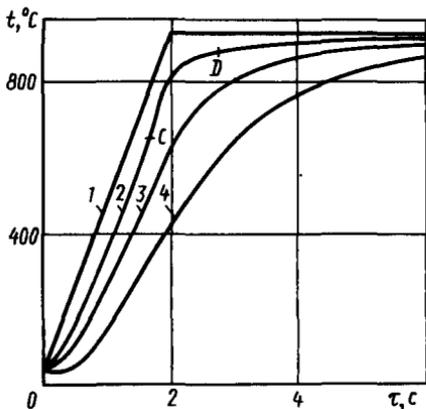


Рис. 3.16. Распределение температуры по сечению образца из стали 40 при нагреве ( $R = 7,5$  мм;  $\hat{t}_H = 2$  с,  $\hat{t}_{\text{нв}} = 920$  °С,  $f = 8$  кГц):  
 1 — поверхность; 2 —  $r = 6$  мм; 3 —  $r = 4,5$  мм; 4 —  $r = 0$

с качественными представлениями о процессе и с накопленной многолетним опытом экспериментальной информацией [6, 27, 28, 83].

Если по постановке задачи закалки температурное поле является управляющим структурными превращениями фактором, то полученные температурные кривые свидетельствуют также об обратном влиянии на него фазовых превращений (например, при нагреве). Так, в области температур  $A_{c1} \leq t \leq A_{c3}$  (от начала превращения перлита П в аустенит А до температуры полного аустенитного превращения) плавный ход температурной кривой в некоторых вариантах нарушается (см. рис. 3.11, 3.16, 3.17). Это связано с тем, что соответствующий фазовый переход (П → А, А → П) происходит с поглощением теплоты. Как известно [27], динамика этого процесса приводит к следующим эффектам. Вначале количество вновь образовавшегося аустенита мало, подводимой теплоты больше, чем нужно для его образования, и избышек теплоты идет на повышение температуры. Затем все большее количество теплоты уходит на превращение все увеличивающегося количества аустенита и рост температуры замедляется: при не слишком быстром нагреве температура либо остается почти постоянной

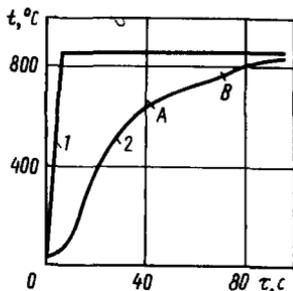


Рис. 3.17. Температура на поверхности (1) и на оси (2) образца из стали 40 при нагреве ( $R = 30$  мм,  $\hat{t}_H = 5$  с,  $\hat{t}_{\text{нв}} = 870$  °С,  $f = 2,4$  кГц)

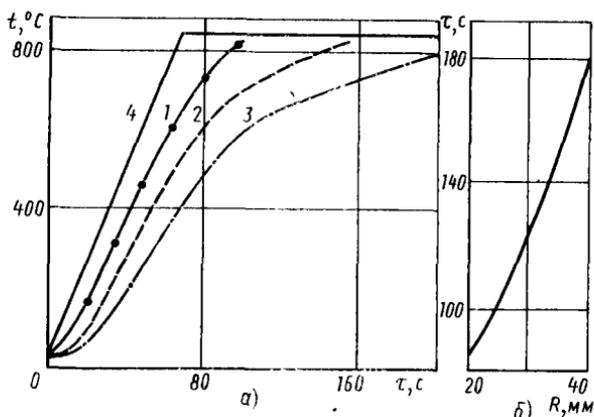


Рис. 3.18. Зависимость температуры на оси образца (а) и времени полного его прогрева до  $A_{c3}$  (б) от радиуса образца из стали 40 ( $\tau_H = 65$  с,  $t_{из} = 850$  °С,  $f = 2,4$  кГц):

1 —  $R = 20$  мм; 2 —  $R = 30$  мм; 3 —  $R = 40$  мм; 4 — желаемая температура поверхности

на некотором малом отрезке времени, либо даже уменьшается (при очень медленном нагреве). Наконец, по мере того как уменьшается количество перлитной фазы, все большее количество теплоты уходит на повышение температуры тела.

Приведенные температурные кривые отражают именно эти характерные особенности влияния перехода  $P \rightarrow A$ ; видно, что при быстром нагреве превращение это происходит на большем температурном интервале (см. рис. 3.16, участок  $CD$  на кривой 2), а при медленном — на меньшем (см. рис. 3.17, участок  $AB$  на кривой, отвечающей центру образца).

Тот же эффект обнаруживается в стадии охлаждения на температурных кривых, соответствующих «приосевой» области (см., например, рис. 3.11). В этой области (при рассматриваемых для закалки значениях  $H_0$ ) охлаждение происходит достаточно медленно, так что вместо образования мартенситной структуры происходит иной переход  $A \rightarrow P'$  (также эндотермический). Так, на кривой 2 (рис. 3.11, в) участок  $FE$  соответствует неполному (с образованием феррита) превращению  $A \rightarrow P$ , что объясняет нарушение ее плавного хода.

Отметим далее, что характер поведения температурных полей, как обнаружилось, мало зависит от марки стали.<sup>1</sup>

Из рис. 3.18, а видно, в свою очередь, что радиус  $R$  образца в выбранном диапазоне скорости нагрева и частот тока слабо

<sup>1</sup> Строго говоря это переход в структурное состояние различной дисперсности и, следовательно, с несколько отличным значением теплоты реакции. Но поскольку различие в теплоте небольшое, им можно для одного и того же сплава пренебречь.

<sup>2</sup> Если речь идет о сплавах с небольшим изменением (в %) коэффициента теплопроводности.

влияет на процессы в приповерхностном слое, где происходит активный [28, 83] нагрев (т. е. в основном в результате выделения теплоты индуцированными токами). Напротив, время полного прогрева образца, приосевые слои которогогреваются за счет теплопроводности, заметно зависит от величины радиуса, возрастая вместе с  $R$  почти линейно (см. рис. 3.18, б).

Влияние параметров режима закалки, как следует, в частности, из приводимых результатов расчета может быть в основных чертах определено следующим образом.

1. Влияние частоты  $f$  тока в индукторе прежде всего соответствует скин-эффекту распределения токов: с уменьшением частоты возрастает глубина эффективного проникновения токов (рис. 3.19, 3.20). При этом естественно (из-за увеличения доли активного нагрева), возрастает скорость прогрева глубинных слоев образца. Проведенные расчеты позволяют дать количественные оценки рабочего диапазона частот в зависимости от радиуса образца.

Естественно (рис. 3.20), что с увеличением радиуса снижение частоты оказывает в этом случае все меньшее действие.

2. С уменьшением  $\hat{\tau}_H$  при данной температуре изотермической выдержки  $\hat{t}_{из}$  (т. е. с увеличением скорости нагрева) все слои образца прогреваются быстрее (рис. 3.21). В то же время при этом возрастает разрыв в скорости нагрева приповерхностных и приосевых слоев.

3. Как следует из приведенных данных (рис. 3.16, 3.21), с увеличением  $\hat{\tau}_H$  все более глубокие слои прогреваются до температуры изотермы  $\hat{t}_{из}$ .

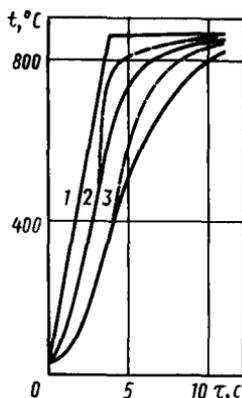


Рис. 3.19. Влияние частоты тока при быстром нагреве ( $\hat{\tau}_H = 4$  с) на температурное поле образца из стали 45 ( $R = 10$  мм;  $\hat{t}_{из} = 880^\circ\text{C}$ ):

—  $f = 8$  кГц; — — —  $f = 2,4$  кГц; 1 —  $r = R$ ; 2 —  $r = 7$  мм; 3 —  $r = 0$

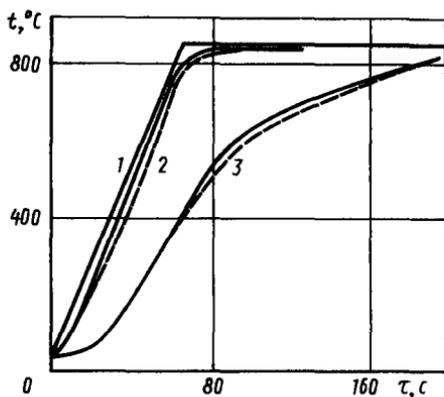
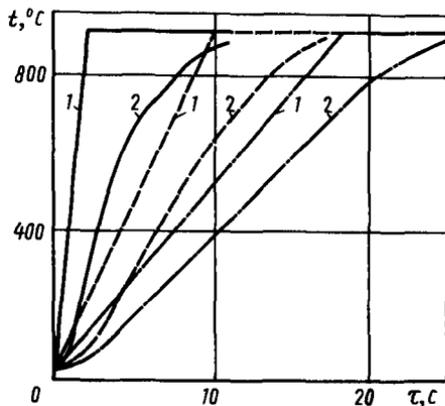


Рис. 3.20. Влияние частоты тока при медленном нагреве ( $\hat{\tau}_H = 65$  с) на температурное поле образца из стали 40 ( $R = 40$  мм,  $\hat{t}_{из} = 850^\circ\text{C}$ ):

—  $f = 1$  кГц; — — —  $f = 2,4$  кГц; 1 —  $r = R$ ; 2 —  $r = 36$  мм; 3 —  $r = 0$

Рис. 3.21. Зависимость температуры на поверхности (1) и на оси (2) образца из стали 40 от скорости нагрева до температуры изотермической выдержки ( $R = 10$  мм,  $f = 8$  кГц):

—  $\tau_{\text{н}} = 2$  с; - - -  $\tau_{\text{н}} = 10$  с; - · - · -  $\tau_{\text{н}} = 18$  с



Как известно [28], прогрев на большую требуемую глубину без перегрева приповерхностных слоев и является основной задачей этой стадии процесса нагрева под закалку.

Учитывая вышесказанное, примем в дальнейшем  $\hat{\tau}_{\text{н}}$  — продолжительность изотермической выдержки при заданной температуре поверхности и частоте тока — в качестве параметра, управляющего процессом нагрева.

Такой выбор согласуется с тем, что время выдержки можно рассматривать как физический параметр, управляющий глубиной слоя, прогретого до закалочной температуры. При этом указанная глубина возрастает с увеличением  $\hat{\tau}_{\text{н}}$  без увеличения размеров зерен аустенита, что важно для упрочнения [28].

4. Повышение уровня изотермы  $\hat{I}_{\text{нв}}$  при заданном времени нагрева заметно влияет на распределение температурного поля, даже если уровень изменяется в достаточно узких пределах (рис. 3.22). То, что в результате такой вариации приосевые слои прогреваются быстрее, ясно заранее, так как при этом возрастает реальная скорость прогрева приповерхностных слоев. Полученные результаты, отражая известный факт, позволяют дать ему количественную оценку. Следует, однако, иметь в виду, что вариация  $\hat{I}_{\text{нв}}$  (разумеется выше  $A_{\text{с}}$ ) нежелательна из-за возможного перегрева поверхности.

Рассмотренные выше эффекты связаны с влиянием управляющих параметров режима на температурные поля в процессе нагрева. На динамику полей при охлаждении, а также на конечный результат закалки они оказывают косвенное влияние через распределение температуры по сечению в конце стадии нагрева  $\hat{\tau}_{\text{н}} = \hat{\tau}_{\text{н}} + \hat{\tau}_{\text{н}}$ .

Более непосредственное влияние на распределение полей при охлаждении оказывает коэффициент поверхностного теплообмена  $H_0$ .

Очевидно, что с увеличением  $H_0$  все слои образца охлаждаются быстрее. Результаты математического эксперимента позволяют дать количественные оценки этому эффекту, иллюстрируемому графически на рис. 3.23.

Из приведенных результатов видно также, что в принятом частотном диапазоне и диапазоне значений  $H_0$  нагрев и быстрое

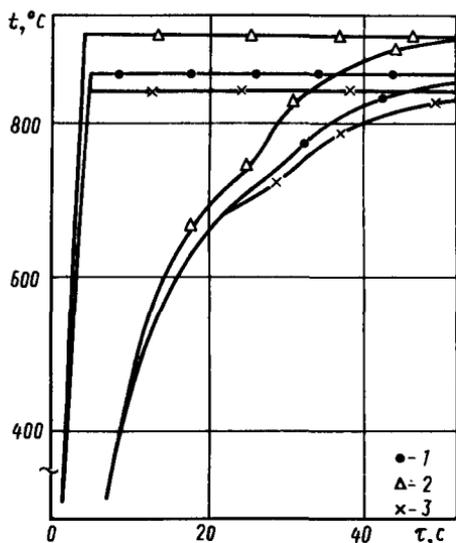


Рис. 3.22. Зависимость температуры на поверхности (1) и на оси (2) образца из стали 40 от температуры изотермической выдержки  $t_{из}$  при нагреве ( $R = 20$  мм,  $t_H = 4$  с,  $f = 2,4$  кГц):  
 1 —  $t_{из} = 920^\circ\text{C}$ ; 2 —  $t_{из} = 870^\circ\text{C}$ ; 3 —  $t_{из} = 850^\circ\text{C}$

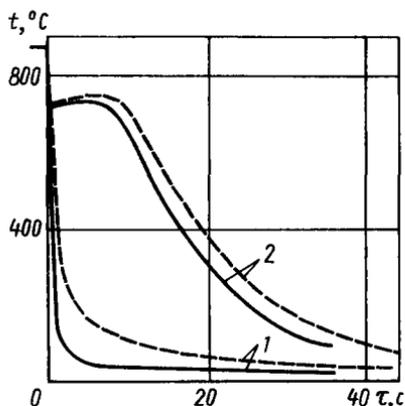


Рис. 3.23. Температура на поверхности (1) и оси (2) образца из стали 45 при двух режимах охлаждения ( $R = 20$  мм,  $t_H = 18$  с,  $f_{из} = 880^\circ\text{C}$ ,  $f = 2,4$  кГц,  $t_H = 4$  с):  
 —  $H_0 = 116,3 \cdot 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  
 - - -  $H_0 = 14 \cdot 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

охлаждение носят приповерхностный характер, что соответствует технологии поверхностной закалки с нагревом ТВЧ, когда прогревание глубинных слоев происходит в основном за счет теплопроводности, т. е. гораздо медленнее. Действительно, температурные кривые (см. рис. 3.16, 3.20, 3.23), соответствующие малым значениям  $r_s$ , обнаруживают наиболее медленный рост и спад; напротив, для значений  $r_s$ , близких к  $R$ , и рост, и спад являются достаточно крутыми.

Указанный характер сказывается, в частности, в том, что температура более глубоких слоев образца, управляемая в основном теплопроводностью, может продолжать расти и после прекращения поверхностного нагрева (рис. 3.23).

В дальнейшем введем время  $\tau^*$ , соответствующее тому, что температура на оси образца достигает максимума в процессе закалки. Заметим, что этот эффект свидетельствует о правильном выборе диапазона соответствующих параметров.

### 3.5.2. Вопросы обработки результатов математического эксперимента и автоматизация управления

Результаты прямых наблюдений над динамикой температурного поля в зависимости от входных параметров полезны для понимания физики термического процесса при закалке. Однако для

проектирования соответствующего технологического процесса более удобным является номографическое описание результатов, при котором устанавливаются связи между входными и некоторыми выходными параметрами процесса, соответствующими так или иначе сформулированным целям его осуществления.

Разумеется, конечной целью закалки является упрочнение деталей. Но этот конечный эффект может быть выражен с помощью различных характеристик: толщины закаленного (мартенситного) слоя, распределения твердости по сечению закаленного образца; если иметь в виду полуоси автомобиля, испытывающие деформации кручения, то указанной характеристикой может быть также момент, соответствующий пределу упругости образца при соответствующих испытаниях. Все такие характеристики устанавливаются с использованием конкретных связей между термическим и структурно-механическим состояниями материала, отраженных в известных диаграммах состояний. Промежуточной, полезной для проектировщика процесса может быть оценка толщины слоя, прогретого на первом этапе закалки до (и выше) температуры аустенитных превращений, поскольку только эти слои способны перейти при охлаждении в мартенсит. Заметим, что такие характеристики не могут быть рассчитаны без математического моделирования процесса, а первые не поддаются и экспериментальному определению. Так, о глубине закалки в зависимости от параметров режима часто судят качественно, оценивая, например, «эффективную» глубину проникновения индуцированного тока  $\delta = \sqrt{2\rho/(\omega\mu)}$ ,  $\omega = 2\pi f$  [28, 83].

Естественно, что комплекс программ для ЭВМ, предназначенный для решения задач моделирования процесса, содержит две основные части: 1) программу-датчик термического состояния образца в динамическом режиме закалки в любой точке  $l$  и произвольный момент времени  $\tau$ ; 2) программу-датчик выходных характеристик процесса индукционной закалки.

Продукция второй части программы — это результат завершающего этапа математического моделирования: обработки данных математического эксперимента. Однако такая обработка тоже допускает автоматизацию при наличии упомянутых выше диаграмм состояний.

Различные номограммы процесса являются как бы промежуточным средством автоматизации управления на уровне проектирования технологического процесса (ТП). При достаточной оснащенности производства вычислительной и иной специальной техникой можно решать задачи и оперативного программного управления ТП.

В последующих пунктах будут рассмотрены различные номограммы, полученные на основе математического моделирования закалки, а также постановки и возможности решения некоторых задач целевого управления процессом.

### 3.5.3. Номограмма нагрева под закалку ( $d$ -номограмма)

Программа-датчик температурных полей  $t(r, \tau)$  позволяет определить, в частности, на какую глубину образец прогрелся до и выше температуры полного аустенитного превращения  $A_{c3}$  в результате нагрева под закалку. Важность такой характеристики для последующей обработки определяется тем, что в закаленное состояние при охлаждении переходит только аустенит. Обозначим эту глубину  $d \equiv R - \rho$ , где  $\rho$  — расстояние от оси, на котором  $t(\rho, \tau) = A_{c3}$ .

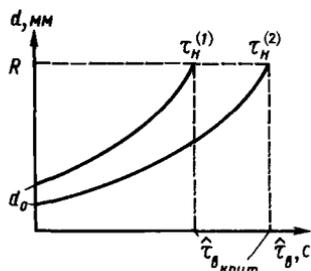
Поскольку температурное поле рассчитывается в любой момент, в том числе и в конце стадии изотермической выдержки, на сетке значений  $\{r_s\}$ , величина  $\rho$  может быть определена автоматически с помощью линейной интерполяции между двумя точками:  $r^*$ , где  $t(r^*, \tau) \leq A_{c3}$ , и  $r^{**}$ , где  $t(r^{**}, \tau) \geq A_{c3}$ . Можно использовать и более точные численные методы решения уравнения  $t(r, \tau) = A_{c3}$ .

Как отмечалось, существенную роль в управлении процессом, среди прочих параметров режима играет время выдержки. Соответственно разработанные авторами  $d$ -номограммы представляют собой зависимость  $d = d(\hat{t}_B)$  при фиксированных значениях прочих параметров. Оказывается, что они имеют вид номограммы, представленной на рис. 3.24, где изображены схематически две кривые  $d = d(\hat{t}_B)$ , отвечающие различным значениям времени нагрева  $\hat{t}_B$ , при одной и той же температуре изотермы  $\hat{t}_{из}$  и одинаковых прочих параметрах.

Подобные номограммы позволяют фиксировать следующие факты, относящиеся к состоянию образца непосредственно в конце стадии нагрева под закалку (включая и изотермическую выдержку).

Поскольку в конце «линейного» нагрева  $\hat{t}_{из}$  больше  $A_{c3}$ , то даже при  $\hat{t}_B = 0$  существует слой толщиной  $d_0$ , прогретый надлежащим образом. Естественно, что значение  $d_0$  растет вместе с увеличением времени нагрева  $\hat{t}_B$ .

С ростом времени выдержки толщина прогретого слоя растет сначала медленно, затем все быстрее и в некоторый момент  $\hat{t}_{B\text{крит}}$  становится равной радиусу образца: образец оказывается прогретым насквозь, т. е. целиком претерпевшим аустенитное превращение. Направивается вывод: греть образец при  $\hat{t}_B > \hat{t}_{B\text{крит}}$  не имеет смысла, и номограмма



позволяет определить предельную продолжительность выдержки при каждом данном значении времени нагрева  $\hat{t}_B$ .

Рис. 3.24. Общий вид  $d$ -номограммы ( $\hat{t}_B^{(1)} > \hat{t}_B^{(2)}$ )

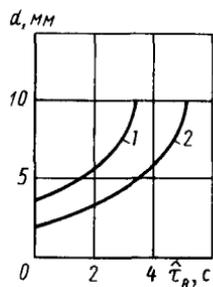
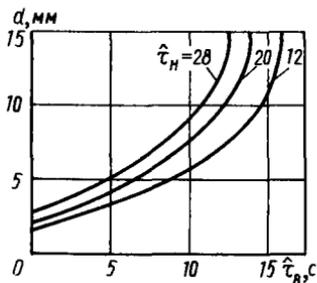


Рис. 3.25. Зависимость  $d$ -кривых от скорости нагрева (сталь 20,  $R = 15$  мм,  $f_{на} = 900^\circ\text{C}$ ,  $f = 8$  кГц,  $A_{c3} = 854^\circ\text{C}$ ). Цифры у кривых —  $t_{н}$ , с

Рис. 3.26. Зависимость  $d$ -кривых от частоты тока (сталь 45,  $R = 10$  мм,  $t_{н} = 4$  с,  $f_{на} = 880^\circ\text{C}$ ,  $A_{c3} = 785^\circ\text{C}$ ): 1 —  $f = 2,4$  кГц; 2 —  $f = 8$  кГц

Заметим, что важная для технологии оценка  $t_{в,крит}$ , даваемая на основе  $d$ -номограмм, является фактически завышенной. Дело в том, что при последующем охлаждении с поверхности возможен дальнейший прогрев внутренних слоев образца (за счет теплопроводности) и, таким образом, некоторые его внутренние слои могут достичь температуры  $A_{c3}$  или даже превзойти ее уже в процессе охлаждения (см., например, рис. 3.11, б, в). Как будет показано ниже, этот эффект приводит к большей экономии времени общего нагрева, чем это предсказывается  $d$ -номограммами.

Вместе с тем такие завышенные оценки указанного времени позволяют установить характерные допуски по  $t_{в}$  при различных прочих параметрах режима закалки.

Естественно принять  $d_0$  и  $t_{в,крит}$  за основные характеристики  $d$ -номограмм, а тем самым эффекта нагрева образца под закалку. Приведенные на рис. 3.25—3.27 варианты номограмм позволяют сделать следующие выводы относительно их зависимости от других параметров режима.

Видно, что с увеличением времени нагрева  $t_{н}$  значение времени  $t_{в,крит}$  уменьшается. Это объясняется тем, что за большее время образец успевает прогреться на большую глубину и требуется все меньшая продолжительность выдержки  $t_{в}$  для того, чтобы и температура центра была бы больше  $A_{c3}$  (см. рис. 3.25).

Такой же эффект — уменьшение  $t_{в,крит}$  обнаруживается и при уменьшении частоты переменного тока в индукторе (см. рис. 3.26). Объяснение этого факта столь же естественно, как и предыдущего. Ток меньшей частоты проникает глубже в образец, увеличивая тем самым глубину активного прогрева, но при этом уменьшается и время, необходимое для сквозного прогрева образца. Правда, использование этого эффекта для образца определенного задаваемого радиуса большой экономической выгоды принести не может, так как существуют хорошо опробованные практикой [28] соотношения между радиусом образца и частотой

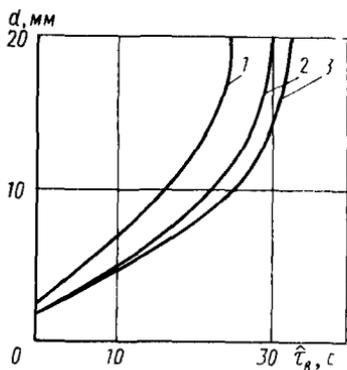


Рис. 3.27. Зависимость  $d$ -кривых от температуры изотермической выдержки  $t_{из}$  (сталь 40,  $R = 20$  мм,  $t_{н} = 4$  с,  $f = 2,4$  кГц):

1 — 920 °C; 2 — 870 °C; 3 — 850 °C

его нагрева, ограничивающие снизу значение частоты во избежание перегрева приповерхностных слоев.

Из рис. 3.27 очевидна сильная зависимость от температуры изотермической выдержки обеих величин, и  $d_0$  и  $t_{крит}$ , первая из них увеличивается, а вторая — уменьшается с увеличением  $t_{из}$ . Это можно объяснить тем, что с увеличением  $t_{из}$  приповерхностные слои прогреваются до большей температуры, а весь образец, тем самым прогревается за меньшее время. Но и на величину  $t_{из}$  технология накладывает дополнительные ограничения, ибо ею определяется размер зерна аустенита, влияющего на микроструктуру закаленных слоев.

Вероятно, наиболее интересным итогом рассмотрения зависимости  $d$ -номограммы от прочих параметров нагрева, наряду с оценками  $d_0$  и  $t_{крит}$ , является вывод, что один и тот же эффект нагрева можно получать при различных выдержках, изменяя скорость нагрева и температуру изотермической выдержки, при этом становится ясным, как именно надо это делать.

Для более уверенного решения задач экономии при назначении конкретного режима закалки необходимо изучить также влияние параметров стадии охлаждения на структурные превращения в прогретом слое, к чему мы и обращаемся.

3.5.4. Номограмма закалки ( $\Delta^{(j)}$  номограмма)

Метод математического моделирования принципиально позволяет оперировать с точной мерой глубины закалки; в работе [23] в качестве таковой принята глубина закаленного не менее чем на  $j$  процентов приповерхностного слоя

$$\Delta^{(j)} = R - f^{(j)}, \quad (3.10)$$

где  $f^{(j)}$  — граница области  $[f^{(j)}, R]$ , содержащей не менее чем  $j$  процентов мартенсита в результате закалки. Будем пользоваться также обозначениями  $\Delta$  и  $\Delta^*$ , для которых  $j$  равно 100 и 50 % соответственно.

Указанная характеристика результатов процесса для данной марки стали зависит от двух факторов:

1) распределения температуры по радиусу в конце полного нагрева (априори ясно, что, по крайней мере, в приповерхностных

слоях температура должна быть достаточно высокой  $t > A_{c_2}$ ;  
2) распределения скоростей охлаждения по сечению образца (требуется, чтобы скорость охлаждения в слое, где ожидается получить мартенсит, была больше или равной критической).

Первый из названных факторов управляется в реальных условиях, как было установлено выше, временем выдержки  $t_B$ , а второй — значением  $H_0$ , коэффициента теплообмена на поверхности  $r = R$ , определяющим скорость ее охлаждения.

Разработанные в работах [23] номограммы закалки представляют собой зависимости  $\Delta^{(l)} = \Delta^{(l)}(t_B)$  при различных значениях  $H_0$  и фиксированных прочих параметрах режима.

Заранее ясно, что скорость охлаждения того или иного глубинного слоя фактически является функционалом, зависящим, с одной стороны, от указанного выше параметра, с другой — от «предыстории» стадии охлаждения, выраженной распределением температуры в результате нагрева, и соответственно от динамики процесса. Поиняно, например, что достаточно глубокий прогрев образца на первой стадии закалки порождает при поверхностном охлаждении встречные тепловые потоки, понижающие скорость охлаждения соответствующего глубинного слоя. Однако эффект динамики процесса охлаждения априори предсказать нельзя, даже качественно, а тем более дать ему разумные количественные оценки.

Расчет  $\Delta$ -номограмм позволяет это сделать. Такой расчет основан на сопоставлении спада температуры в каждом слое образца с известными из эксперимента по закалке сталей диаграммами распада аустенита при охлаждении (С-образными кривыми) [28], и, таким образом, наряду с информацией, выдаваемой программой-датчиком, используется некоторый графический материал.

К сожалению, в литературе отсутствуют С-образные кривые для собственно индукционной закалки ряда сталей, например стали 47ГТ. Это снижает точность оценки глубины закаленного слоя для таких материалов, однако не меняет характера обнаруженных нами закономерностей, а также вытекающих из них выводов.

Рассмотрим процедуру обработки температурных полей при охлаждении для получения значений  $\Delta^{(l)}$ .

С-образные кривые схематически изображены сплошными толстыми линиями на рис. 3.28 и по форме легко отличимы от прочих кривых. Область переменных ( $\tau$ ,  $t$ ) они делят на ряд подобластей, обозначенных на рисунке буквами; различные подобласти отвечают разным фазовым состояниям либо равным фазовым переходам, причем результат перехода фиксируется на выходе из соответствующей подобласти при движении в направлении убывания переменной  $t$  (следует иметь в виду, что рассматривается процесс охлаждения). На рисунке соответствующие буквы имеют следующий смысл:  $A$  — аустенит;  $M$  — мартенсит;

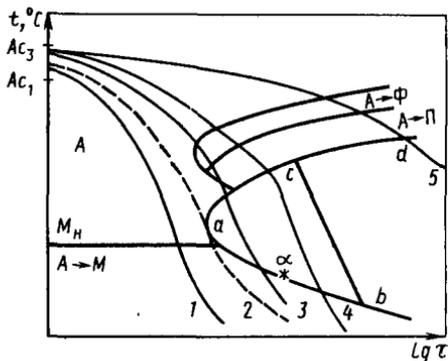


Рис. 3.28. Термокинетическая диаграмма — C-кривая (общий вид) [31]:  
1—5 — температурные кривые при охлаждении

$\Phi$  — феррит;  $\Pi$  — перлит;  $M_n$  — температура начала мартенситного превращения;  $A \rightarrow \Phi$  и т. п. — области соответствующих фазовых переходов.

На том же рисунке тонкими линиями схематически представлены возможные

температурные кривые  $t(r, \tau)$  при охлаждении в предположении, что при  $\varphi > 0$  ( $\tau = 0$  — условное время начала охлаждения) температура монотонно убывает.

Переход от кривой охлаждения 5 к кривой 4 и т. д. по кривой 1 соответствует увеличению скорости охлаждения и получению более упрочненных (твердых) структур в результате закалки, в том числе и за счет дополнительных остаточных напряжений.

Охлаждение же, происходящее по кривым 2 и 1 (соответствующим скоростям охлаждения, равным или большему критической<sup>1</sup>), происходит столь быстро, что аустенит переохлаждается до температуры начала мартенситного превращения и при дальнейшем охлаждении превращается в мартенсит; при этом происходит «полая» закалка соответствующих этим скоростям приповерхностных слоев образца (100 % M)<sup>2</sup>;  $\Delta = \Delta^{(100)}$ .

Следовательно, определение  $f^{(100)}$  сводится к установлению соответствия между кривой типа 2 (см. рис. 3.28) и соответствующим значением  $r(\hat{t}_m)$ , где  $\varphi = \hat{t}_m$  отвечает точке максимума температуры кривой при охлаждении, т. е. речь идет о выборе из заданного непрерывного множества температурных кривых касательной к некоторой заданной кривой (C-образной).

Процедура такого выбора поясняется с помощью рис. 3.29. Расчет температурного поля позволяет легко обнаружить пару кривых  $t_{s-1} = t(r_{s-1}, \tau)$  и  $t_s = t(r_s, \tau)$ , одна из которых пересекает C-образную, а другая — нет. При достаточно малом расчетном шаге по времени по трем близким точкам  $\tau_j, \tau_{j+1}, \tau_{j+2}$ , выбранным вблизи абсциссы «носа» C-образной кривой, выделяются сегменты указанных кривых, практически параллельные, и таким образом определяется направление касательной (критиче-

<sup>1</sup> Скорость охлаждения, отвечающая кривой 2 (см. рис. 3.28), касательной к «носу» C-образной кривой, является критической  $v_n$ , ибо только охлаждение со скоростью, большей (или равной)  $v_n$ , дает наиболее твердую мартенситную структуру.

<sup>2</sup> В конструкционных сталях обычно сохраняется до 5—8 % остаточного аустенита.

ская скорость охлаждения  $v_n$ ). Зная его, нетрудно уже построить касательную в рассматриваемом малом сегменте  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$  и соответственно найти  $(\varphi^*, t^*)$  — положение точки касания. В результате оказываются известными отношения отрезков прямой  $t = t^*$  (либо  $\varphi = \varphi^*$ ) до точек пересечения с  $t_{s-1}(r_{s-1}, \varphi)$  и  $t_s(r_s, \varphi)$ , и тогда соответствующее пропорциональное деление позволяет определить  $r^*$  (а следовательно, и приближенное значение  $\tilde{\Delta} = R - r^*$ ). Значение  $r^*$  и принимается в качестве  $r^{(100)}$ . Очевидно, что используемая здесь линейная интерполяция приводит к тем более точному результату, чем меньше расстояние между  $r_s$  и  $r_{s-1}$ .

Более точное значение  $r^*$  может быть получено на ЭВМ с помощью автоматизации расчета [23], в основу которой естественно положить итерационный метод «вилки» [35]. При этом найденное указанным выше способом значение  $r^*$  отождествляется с новым значением либо  $r_{s-1}$ , либо  $r_s$ , в зависимости от поведения кривой  $t(r^*, \varphi)$ , и процедура повторяется; она заканчивается по проверяемому каждый раз условию достаточной близости двух последовательных приближений значения  $r^*$ .

Заметим, что рассматриваемая задача не допускает аналитического решения, ибо дело сводится к поиску корня  $r = r^*$  из системы уравнений:

$$\begin{cases} t(r, \varphi) = c(\varphi), & t'_r(r, \varphi) = c'(\varphi), & \varphi > \varphi_m (\varphi_m = \hat{\varphi}_n + \hat{\varphi}_s), \\ \text{либо } t'(r, \varphi_m) = 0, \end{cases}$$

где  $t(r, \varphi)$  — функция, заданная алгоритмически, а  $c(\varphi)$  — функция, заданная графически или таблично.

Для определения  $\Delta^{(j)}$  при любом  $(j)$  заметим, что каждой точке второго пересечения  $t = t(r, \varphi)$  с С-образной кривой (например, точке  $\alpha$  на рис. 3.28) термодинамическая диаграмма сопоставляет определенный процент содержания мартеисита при условии, что  $\alpha$  лежит на криволинейном сегменте  $[a, b]$ ; если  $t = t(r, \varphi)$  пересекает С-образную кривую правее точки  $c$  (на сегменте  $[a, d]$ ), т. е. при достаточно медленном охлаждении, ведущем к распаду аустенита на другие фазы, мартезит не образуется. Следовательно, задача об определении  $\Delta^{(j)}$  сводится к выбору из заданного множества температурной кривой, пересекающей С-образную кривую в заданной точке, иначе говоря, к решению следующей задачи относительно  $r = r^{(j)} : t(r, \varphi^*) = c(\varphi^*)$ , где  $c(\varphi^*)$  — «нижняя» ветвь С-образной кривой,  $t(r, \varphi^*)$  — ветвь температурной кривой в области  $\varphi > \varphi_m$ , где либо  $\varphi_m = \hat{\varphi}_n + \hat{\varphi}_s$ , либо  $t'(r, \varphi_m) = 0$ . Эта задача также решается с помощью процедуры, описанной выше и полностью автоматизированной.

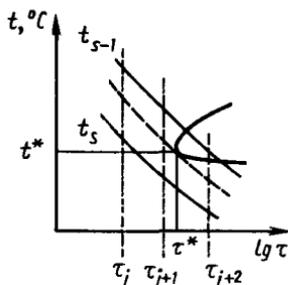


Рис. 3.29. Схема определения  $\Delta$ -слоя

Обработка результатов математического эксперимента в диапазоне входных параметров, соответствующем технологическому процессу на ПО ЗИЛ, позволила установить [23] характерные особенности номограмм закалки, представленных на рис. 3.30.

Различные кривые на этом рисунке ( $\Delta = \Delta(\hat{t}_B)$ ) отвечают различным значениям коэффициента теплообмена на поверхности образца при охлаждении. К числу их характерных особенностей следует отнести существование предельного значения  $\hat{\Delta}_l \ll R$  толщины закаленного слоя при  $\hat{t}_B \rightarrow \infty$ ; существование максимального значения  $\Delta_m$  и соответственно «оптимального» в этом смысле значения времени выдержки.

Очевидно, поведение этих кривых дает возможность составить конкретное представление об эффектах взаимодействия различных факторов, влияющих на реальную скорость охлаждения в различных слоях образца, и дать количественные оценки этим эффектам.

Вытекающие из рассмотрения общего характера  $\Delta$ -номограммы (см. рис. 3.30), а также номограмм, отвечающих различным совокупностям прочих параметров режима (рис. 3.31, 3.32), выводы состоят в следующем.

1. При малых временах выдержки, когда прогретым выше температуры  $A_{св}$  оказывается сравнительно тонкий слой, прилегающий к поверхности, все его элементы имеют примерно одинаковую скорость охлаждения, а значит, и весь этот слой способен приобрести (при соответствующей скорости охлаждения поверхности) мартенситную структуру, т. е. перейти в закаленное состояние. Таким образом, при малых  $\hat{t}_B$ , когда нагретый слой достаточно тонок и толщина его растет с увеличением  $\hat{t}_B$ , должна расти и толщина  $\Delta$ . Как обнаруживают номограммы, рост  $\Delta$  оказывается линейным. Указанный эффект заметнее сказывается для малых времён нагрева  $\hat{t}_B$  (т. е. при быстром нагреве), когда глубинные слои образца не успевают еще прогреться до достаточно высоких температур (см. рис. 3.31) и не дают интенсивного встреч-

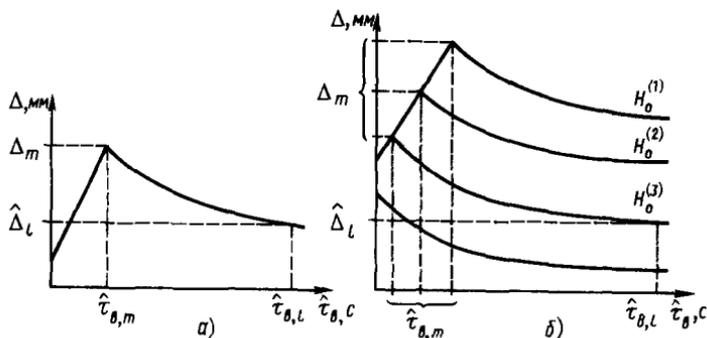


Рис. 3.30. Общий вид  $\Delta$ -номограмм:

а — для одного значения  $H_0$ ; б — для нескольких значений  $H_0$  ( $H_0^{(1)} > H_0^{(2)} > H_0^{(3)}$ )

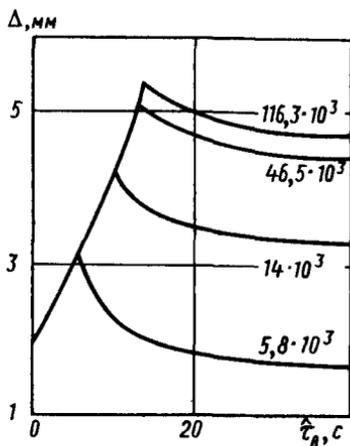


Рис. 3.31.  $\Delta$ -нограмма при быстром нагреве ( $t_{\text{н}} = 4$  с, сталь 40,  $R = 20$  мм,  $t_{\text{нв}} = 850^\circ\text{C}$ ,  $f = 2,4$  кВт). Цифры у кривых — коэффициент конвективного теплообмена  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

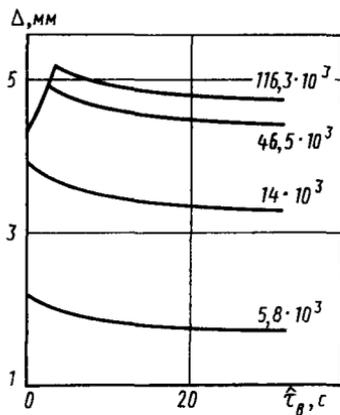


Рис. 3.32.  $\Delta$ -нограмма при медленном нагреве ( $t_{\text{н}} = 65$  с, сталь 40,  $R = 30$  мм,  $t_{\text{нв}} = 850^\circ\text{C}$ ,  $f = 2,4$  кВт). Цифры у кривых —  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

ного теплового потока при охлаждении. Можно сказать, что при малых  $t_{\text{н}}$  нагрев имеет поверхностный характер.

2. Начиная с некоторого значения времени  $t_{\text{в}}$  толщина закаленного слоя уменьшается с увеличением  $t_{\text{в}}$ . Это объясняется тем, что при прогреве образца выше температуры  $A_{\text{св}}$ , близком к сквозному, скорость охлаждения резко падает от поверхности к центру образца, что естественно при поверхностном охлаждении; из глубоких слоев образца образуется встречный тепловой поток, тем больший, чем более глубокие слои прогреты, что и приводит к указанному эффекту. Очевидно, что при этом не весь прогретый до  $A_{\text{св}}$  слой переходит в мартенситное состояние.

3. Из отмеченных выше особенностей процесса естественным образом следует существование критических значений  $t_{\text{в.м}}$ , соответствующих максимальному значению толщины закаленного слоя  $\Delta_{\text{м}}$ , что и обнаруживают номограммы.

Заметим, что при достаточно больших значениях  $t_{\text{н}}$  (или малом радиусе образца) фаза линейного роста  $\Delta$  отсутствует (см., например, рис. 3.30, штриховая кривая, и рис. 3.32) и толщина  $\Delta$  максимальна уже при нулевой выдержке. Этот факт объясняется тем, что при медленном нагреве (или малом радиусе) образец за время  $t_{\text{н}}$  успевает прогреться (при разности температур поверхности и центра  $\sim 10^\circ\text{C}$ ) насквозь и потому при переходе к охлаждению с поверхности эффект подогрева приповерхностного слоя изнутри возникает при  $t_{\text{в}} = 0$ ; увеличение выдержки приводит только к повышению температуры глубоких слоев и соответственно увеличению отрицательного теплового потока.

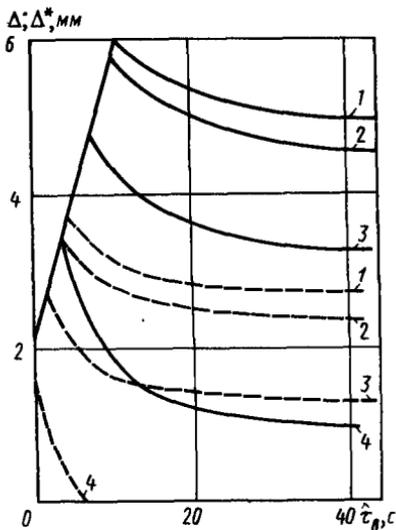


Рис. 3.33. Номограммы закалки (— — —  $\Delta$ ; — — —  $\Delta^*$ ) при различных значениях  $H_0$  (сталь 45;  $R = 20$  мм;  $\tau_H = 4$  с;  $t_{\text{вв}} = 880$  °С;  $f = 2,4$  кГц):  
 1 —  $H_0 = 116,3 \cdot 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С); 2 —  $H_0 = 46,5 \cdot 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С); 3 —  $H_0 = 14 \times 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С); 4 —  $H_0 = 5,8 \cdot 10^8$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С)

Таковы результаты непосредственных «наблюдений» над  $\Delta$ -номограммами. Таким образом, «конкурирующие» физические процессы — поверхностное охлаждение и глубинный прогрев — в соответствующем закалке диапазоне параметров режима приводят к весьма выразительному результирующему влиянию на одну из основных характеристик итога закалки.

Представление о зависимости  $\Delta$ -номограмм от различных параметров процесса можно получить также из рис. 3.33.

Обнаруженный эффект позволяет осознанию формулировать состоятельные постановки задачи управления технологическим процессом закалки.

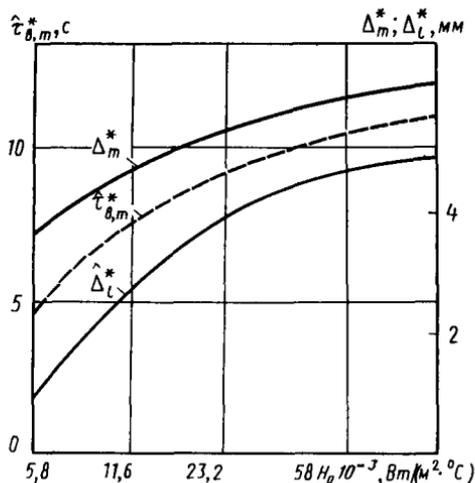
Если принять толщину закаленного слоя с содержанием мартенсита, не меньшим заданного, за меру прочности образца, то естественно стремиться к возможно большей ее величине или строго согласованной с эпюрой рабочих напряжений по сечению.

Поинтым, например, является требование технолога получить образец с толщиной закаленного слоя не менее заданной заранее величины. Для такой постановки номограммы закалки показывают, какие глубины закалки достижимы вообще и как следует выбрать управляющие параметры для достижения цели.

Наряду с этим возможна постановка задачи управления, при котором наибольшая из возможных глубина закалки достигается за минимальное время. Решение этой задачи, получаемое из номограмм закалки ( $\tau_{\text{внрт}}^{(j)}$ ,  $\Delta_m^{(j)}$ ), способствует, очевидно, экономии энергии и повышению производительности ВЧ-оборудования в результате сокращения времени изотермической выдержки. Так, внедрение указанных результатов на ЗИЛе позволило увеличить производительность производственной установки более чем на 10 %.

Следует иметь в виду, что получать количественные оценки оптимального времени выдержки только на основе номограмм для 100 %-ной аустенитной структуры вряд ли целесообразно, поскольку при этом может быть нанесен ущерб качеству деталей. В самом деле, в этом случае образуется достаточно резкая гра-

Рис. 3.34. Зависимость характеристик заковки для полумартенситной структуры от коэффициента конвективного теплообмена  $H_0$  (сталь 45,  $R = 20$  мм,  $\hat{t}_в^* = 4$  с,  $\hat{t}_{из} = 880$  °С,  $f = 2,4$  кГц)



ица между закаленным (тонким) приповерхностным слоем и основной массой незакаленного материала, что оставляет резервы для упрочнения детали на предмет эксплуатации. При малом закаленном слое и работе деталей на изгиб или кручение разрушение может начаться под закаленным слоем, где достаточно велики рабочие напряжения.

Для обеспечения более плавного перехода от полностью закаленного слоя к незакаленной структуре можно выбирать оптимальное время выдержки таким образом, чтобы при этом достигал максимальной величины слой, содержащий меньший процент мартенсита. На практике [26, 28] обычно считают удовлетворительной полумартенситную структуру.

Оценка такого времени  $\hat{t}_{в,m}^*$  может оказаться полезной как ориентировочная при проектировании процесса заковки. Если она известна, то можно установить рабочий диапазон для стадии выдержки  $\hat{t}_{в,m}^* \leq \hat{t}_в \leq \hat{t}_{в,l}$ , где  $\hat{t}_{в,l}$  — время выдержки, отвечающее полному прогреву образца до температуры  $\hat{t}_{из}$ .

Номограммы заковки для полумартенситной структуры (50 % M) —  $\Delta^*$ -номограммы, в зависимости от некоторых параметров и в сравнении с  $\Delta$ -номограммами представлены на рис. 3.33. Примем в качестве числовых характеристик оптимального в указанном выше смысле результата заковки [23, 28], в частности, для полумартенситной структуры величины  $\Delta_m^*$ ,  $\hat{t}_{в,m}^*$  и  $\hat{\Delta}_i^*$  (последнее может рассматриваться как приближенное значение толщины слоя, соответствующего сквозному прогреву образца до температуры  $A_{c3}$ ). Зависимость этих характеристик от коэффициента теплообмена  $H_0$ , получающаяся простой обработкой  $\Delta^*$ -номограмм, представлена (при некоторых значениях прочих параметров) на рис. 3.34.

Подобного типа вторичные номограммы, получаемые как следствие математического эксперимента и обработки его результатов, могут быть более удобны при проектировании технологического процесса с определенной целевой постановкой задачи.

### 3.5.5. Распределение твердости по сечению образца и оценка его эксплуатационной прочности

Поскольку температурное поле при закалке найдено, термокинетическая диаграмма типа представленной на рис. 3.28 позволяет сопоставить динамику изменения температурного состояния слоя (кривой  $t(r, \varphi)$  при любом фиксированном  $r$ ), структурный состав слоя и соответственно его свойства, например твердость [28] (описание С-диаграммы и способ сопоставления с ней температурного поля дано выше).

Очевидно, что слои, где скорость охлаждения выше критической и охлаждение продолжается до температуры конца мартенситного превращения (точка  $M_H$ ), образуют либо чисто мартенситную структуру, либо смешанную, процент мартенсита которой практически для простых углеродистых сталей равен проценту аустенита в конце нагрева, тогда как оставшуюся часть составляет в этих слоях феррит. Слои, для которых температурные кривые пересекают С-образную кривую, содержат наряду с мартенситом и тростит, либо перлит, либо бейнит — в зависимости от значения «нижней» точки пересечения  $t_s$  указанных кривых. Поскольку твердости различных структур многих стандартных сталей известны [6, 26, 28, 83], оказывается возможным по найденному распределению температуры найти распределение твердости в результате закалки.

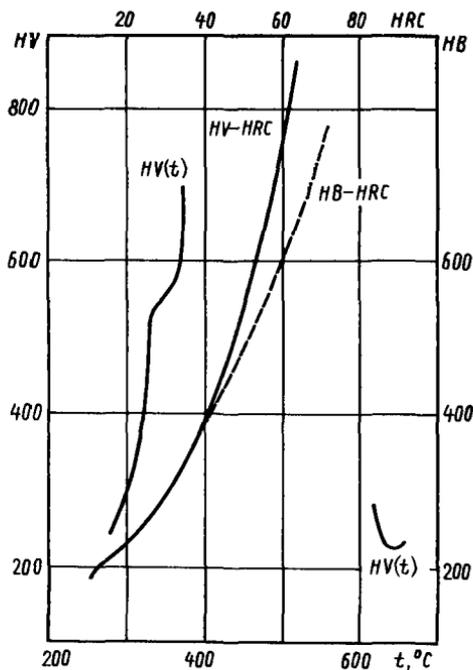
Для целей автоматизации обработки в ходе выполнения работ [23, 62, 69] была составлена (для стали 45) номограмма зависимости  $HV(t)$  —  $\hat{H}$ -номограмма (рис. 3.35). Две ветви кривой  $HV(t)$  соответствуют различным типам структурных превращений, в зависимости от температуры переохлажденного аустенита, для которых имеется нужная экспериментальная информация.<sup>1</sup> Поскольку в разных источниках значения твердости интересующих нас материалов даны в разных единицах, эта номограмма включает и сопоставление различных единиц твердости, что делает ненужным предварительный пересчет используемого табличного материала. При составлении такой номограммы использовались таблицы соответствия [4]. Номограмма является составной частью табличной информации, вводимой в ЭВМ для обработки результатов математического эксперимента.

Рассмотрим процесс определения твердости несколько подробнее.

1. Для слоев, имеющих в конце нагрева чисто аустенитную структуру,  $t(r, \hat{t}_{ox}) \cong Ac_3(\hat{t}_{ox} \equiv \hat{t}_H = \hat{t}_H + \hat{t}_B)$ , по С-диаграмме («наложением на нее кривой  $t(r, \varphi - \hat{t}_{ox})$ ») находим температуру  $t_s$ , а затем по  $\hat{H}$ -номограмме — их твердость. Если при этом аустенит образовался уже в стадии поверхностного охлаждения,

<sup>1</sup> Сравните с рис. 3.28 (см. участки С-образной кривой).

Рис. 3.35. Термокнитическая зависимость твердости от температуры структурных превращений,  $HV(t)$  и сопоставление различных единиц твердости:  $HV$ ,  $HB$  и  $HRC$



то  $\hat{t}_{ох}$  есть момент времени, с которого начинается реальное охлаждение (рис. 3.36).

2. Твердость слоев, прогретых до температур  $Ac_1 \leq t(r, \hat{t}_{ох}) \leq Ac_3$ , т. е. состоящих из аустенита (А) и феррита (Ф), определяем как линейную комбинацию твердостей, образовавшихся при охлаждении фаз, с учетом их процентного соотношения. В этом случае твердость А определяется так же, как и выше, а твердость по Виккерсу Ф составляет примерно 1000 МПа. Исходное количество А и Ф для соответствующего слоя определяется по найденной функции  $t(r, \hat{t}_{ох})$  с помощью кривой соотношения этих фаз (рис. 3.37, б), построенной по диаграмме состояния сплавов Fe—Fe<sub>3</sub>C (рис. 3.37, а [28]).

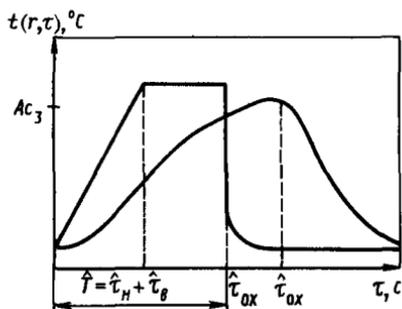


Рис. 3.36. Выбор момента охлаждения для наложения температурной кривой на С-диаграмму ( $\hat{t}_{ох} = \hat{T}$  или  $\hat{t}_{ох} > \hat{T}$ )

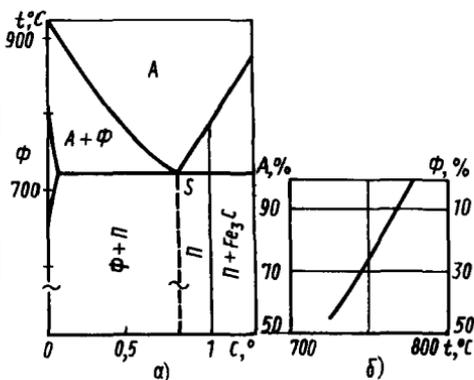


Рис. 3.37. Часть диаграммы состояния Fe—Fe<sub>3</sub>C (а) и зависимость процентного содержания аустенита и феррита стали 45 (б) от температуры нагрева под закалку (при медленном нагреве)

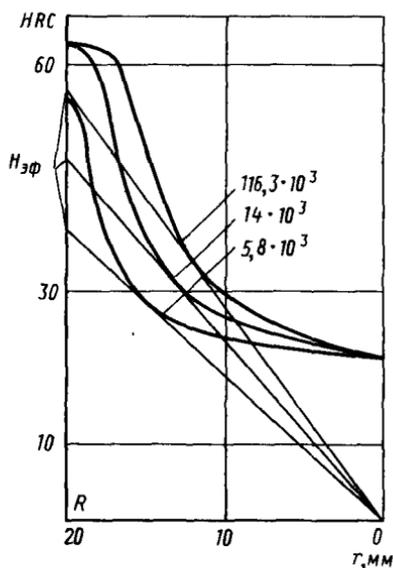


Рис. 3.38. Распределение твердости по сечению образца из стали 45 и зависимость эффективной твердости  $H_{эф}$  от  $H_0$  ( $R = 20$  мм,  $t_H = 4$  с,  $t_{изв} = 880$  °С,  $t_B = 18$  с,  $f = 2,4$  кг/ц). Цифры у кривых —  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°С)

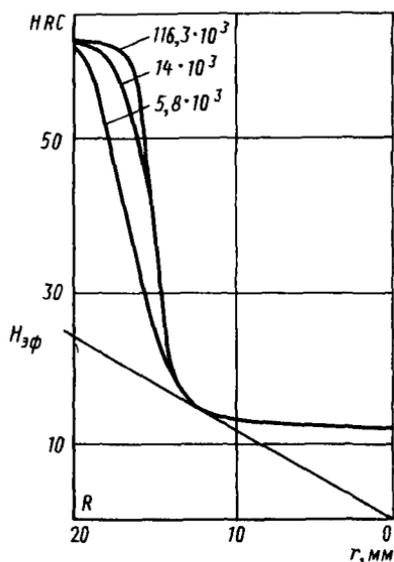


Рис. 3.39. Распределение твердости по сечению образца из стали 45 и  $H_{эф}$  при малой изотермической выдержке ( $t_B = 6$  с,  $R = 20$  мм,  $t_H = 4$  с,  $t_{изв} = 880$  °С,  $f = 2,4$  кг/ц). Цифры у кривых —  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°С)

3. Твердость тех слоев, температура которых  $t(r, t_{ох}) < A_{c1}$  (содержащих феррит и перлит), остается неизменной (например, для стали 45 ~ 190 НВ) и определяется только количеством углерода в данной стали, ибо это и предопределяет процентное соотношение Ф и П (см. также диаграмму на рис. 3.37, а).

Заметим, что расчет процентного соотношения фаз по диаграмме состояния сплавов отвечает общепринятому [28].

Получаемое указанным способом распределение твердости по сечению имеет характерный вид, представленный на рис. 3.38 (жирные линии).

В качестве величины, характеризующей связь момента упругости при испытании цилиндрических образцов на кручение и распределения твердости по сечению образца, примем значение «эффективности» твердости  $H_{эф}$  [69].

Величина  $H_{эф}$  (HRC) определяется в соответствии с [69] как точка пересечения с вертикальной осью (твердости), касательной к кривой распределения твердости  $\theta = \theta(r)$ , проведенной из начала отсчета (ответствующего значению  $r = 0$ ).

Соответствующая обработка кривых твердости может быть выполнена обычными способами; для автоматизированной же

обработки на ЭВМ задача, очевидно, сводится к решению следующей:

$$\theta(r) = \theta'(r)r \Rightarrow r_0; \quad (3.11)$$

$$H_{\text{вф}} = \theta'(r_0)R.$$

Задача осложнена тем, что функция  $\theta = \theta(r)$  задана таблично. Тем не менее ее решение на ЭВМ проводится несущественной модификацией процедуры, описанной при определении границы закаленного слоя (точки касания температурной и С-образной кривой).

На рис. 3.39—3.43 приведены рассчитанные указанным выше способом распределения твердости образцов из стали 45 при различных параметрах закалки.

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы.

В рассматриваемом диапазоне размеров образцов  $R = 20 \div 40$  мм при уменьшении времени выдержки все более выделяется эффект поверхностной закалки, т. е. сокращение размеров переходной области от закаленной к незакаленной структуре, который мало зависит от скорости охлаждения (см. рис. 3.38, 3.39). За это время центр не успевает прогреться выше  $t(r, t_{\text{ох}}) \geq Ac_1$  и охлаждаются только поверхностные слои образца. При  $R = 40$  мм (см. рис. 3.40) этот эффект наблюдается даже при  $t_{\text{в}} \sim 70$  с.

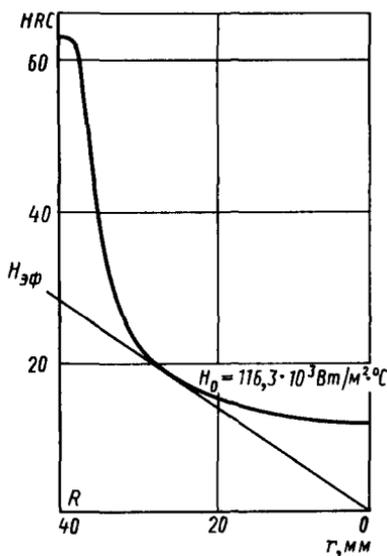


Рис. 3.40. Характерное распределение твердости по сечению при закалке образца из стали 45 большого радиуса ( $R = 40$  мм,  $t_{\text{н}} = 4$  с,  $f_{\text{из}} = 880$  °C,  $t_{\text{в}} = 75$  с  $f = 2,4$  кГц)

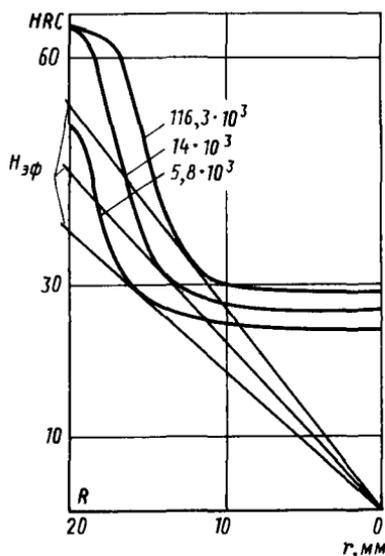


Рис. 3.41. Распределение твердости по сечению образца из стали 45 и  $H_{\text{вф}}$  при большой скорости нагрева под закалку ( $t_{\text{н}} = 4$  с,  $R = 20$  мм,  $t_{\text{в}} = 25,5$  с,  $f_{\text{из}} = 880$  °C,  $f = 2,4$  кГц). Цифры у кривых —  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

Начиная с некоторого времени  $\hat{t}_в$  распределение твердости перестает практически зависеть от  $\hat{t}_н$  и  $\hat{t}_в$ , что можно объяснить прогревом образца за соответствующее время насквозь уже в стадии нагрева и тем, следовательно, что поле  $t(r, \hat{t}_{ox})$  будет почти постоянно по радиусу в этих режимах (сравнить рис. 3.41 и 3.42).

Распределение рассчитанной твердости подтверждает известное из практики суждение [69] о том, что с уменьшением скорости охлаждения результирующая твердость в каждой точке сечения образца должна уменьшаться. При этом обнаруживается критически отрицательное влияние увеличения продолжительности выдержки на величину твердости. Так, из рис. 3.33, 3.39 и 3.41 следует, что в образце  $R = 20$  мм при  $H_0 = 5,8 \cdot 10^3$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C) даже приповерхностный слой оказывается не полностью закаленным уже при  $\hat{t}_в \geq 6$  с, если нагрев проводится достаточно быстро ( $\hat{t}_н \sim 4$  с); при медленном же нагреве ( $\hat{t}_н = 20$  с) соответствующее состояние обнаруживается уже при  $\hat{t}_в \geq 1$  с. Это объясняется тем, что при большем времени выдержки поток изнутри будет большим и охлаждения с поверхности не хватает на 100 %-ную закалку даже вблизи нее.

Из рис. 3.43 видно, что образцы небольших размеров ( $R = 10$  мм) уже при небольшой выдержке ( $\sim 8$  с),  $\hat{t}_н = 4$  с и малой скорости охлаждения имеют довольно твердую сердцевину ( $\sim 40$  HRC). И нужно очень точно выдерживать режим охлаждения для получения нужного

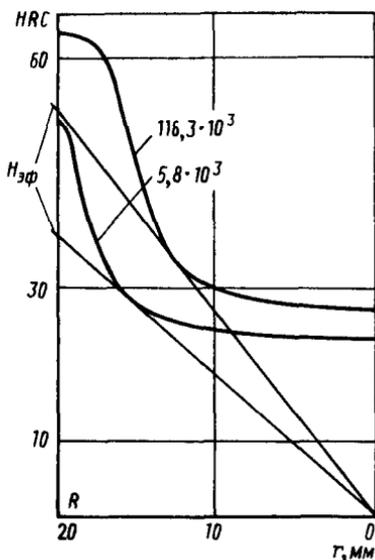


Рис. 3.42. Распределение твердости по сечению образца из стали 45 и  $H_{эф}$  при малой скорости нагрева ( $\hat{t}_н = 20$  с;  $R = 20$  мм;  $\hat{t}_в = 24$  с;  $\hat{t}_{нв} = 880$  °C;  $f = 2,4$  кГц). Цифры у кривых —  $H_0$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

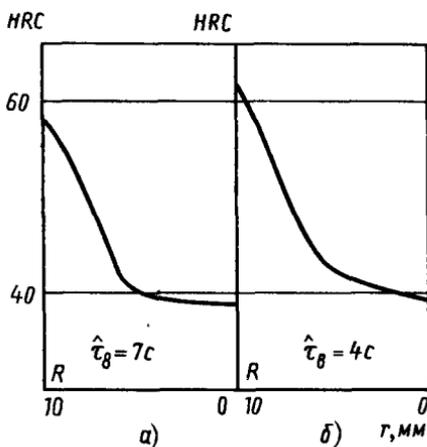


Рис. 3.43. Влияние поверхностного охлаждения на распределение твердости по сечению образца из стали 45 малого радиуса ( $R = 10$  мм) при выдержке  $t_в$ , равной 7 с (а) и 4 с (б) ( $\hat{t}_н = 4$  с,  $\hat{t}_{нв} = 880$  °C,  $f = 8$  кГц,  $H_0 = 5,8 \cdot 10^3$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C)

распределения твердости. Это не удивительно: образец мал по размеру и успевает даже при малом  $H_0$  ( $\sim 5,8 \cdot 10^9$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C)) быстро охлаждаться вплоть до оси.

Полученные выводы соответствуют принятым [6, 26, 28, 83] качественным суждениям и экспериментальным данным [69] о влиянии различных факторов. Однако на основе описываемого математического эксперимента впервые проведено достаточно детальное изучение распределения твердости в зависимости от параметров режима закалки, что приводит к соответствующим количественным оценкам.

Заметим также, что полученные распределения твердости по сечению дают уже детальное представление о результате закалки, включающее информацию о структуре слоев образца в переходной зоне. Именно такая информация позволяет уточнить оценки значений управляющих параметров на основе изучения эффективной твердости, т. е. требуемой твердости на заданной глубине.

### 3.5.6. Номограммы эффективной твердости ( $\theta$ -номограммы)

Предлагаемые  $\theta$ -номограммы представляют собой зависимости эффективной твердости ( $H_{\text{эф}}$ ) от времени выдержки при различных прочих параметрах режима закалки. Неудивительно, что они обладают почти теми же особенностями, что и  $\Delta^{(j)}$ -номограммы. Соответственно они дают возможность получить количественную оценку оптимального  $\hat{t}_в$ , отвечающего априори заданному или максимальному значению эффективной твердости.

Полученные на основании расчета температурных полей и предшествующих этапов обработки  $\theta$ -номограммы (рис. 3.44, 3.45) [23, 69] позволяют сделать следующие выводы.

1. При малых временах  $\hat{t}_в$  зависимость  $H_{\text{эф}}$  от  $\hat{t}_в$  почти линейна. Это соответствует линейному росту толщины закаленного слоя в условиях, когда статический момент определяется главным образом его толщиной, поскольку сам слой имеет весьма резкую границу (см. рис. 3.39).

2. При больших  $\hat{t}_в$  (например,  $\hat{t}_в \geq 27$  с для  $R = 20$  мм,  $\hat{t}_н = 4$  с) статический момент уже не зависит от выдержки при нагреве и от времени нагрева  $\hat{t}_н$  (см. рис. 3.44). Таким образом, существует предельное (не меняющееся с увеличением времени) значение  $H_{\text{эф}}$  эффективной твердости (рис. 3.44). Это объясняется независимостью от  $\hat{t}_в$  и  $\hat{t}_н$  эффективной твердости при достаточно больших временах выдержки (см. рис. 3.55). Из номограмм видно, что на кривых  $H_{\text{эф}}(\hat{t}_в)$  существует максимум  $H_{\text{эф}}^m$  и максимальное это значение не слишком отличается от предельного  $\hat{H}_{\text{эф}}$  при большом времени  $\hat{t}_в$ .

3. Сопоставление с номограммами нагрева, учитывающими также эффекты теплопроводности при охлаждении (см. рис. 3.45),

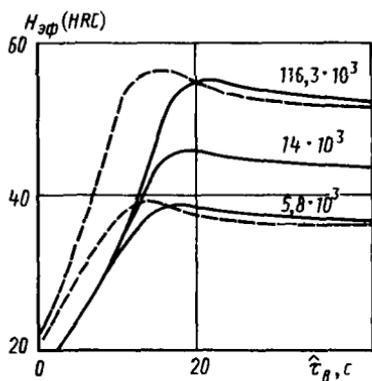


Рис. 3.44.  $\theta$ -номограмма образца из стали 45 при двух скоростях нагрева под закалку ( $R = 20$  мм,  $t_{\text{за}} = 880$  °C,  $f = 2,4$  кГц). Цифры у кривых —  $H_0$ , ВТ/(м<sup>2</sup>·°C):  
 —  $v_{\text{н}} = 4$  с, — — — —  $v_{\text{н}} = 20$  с

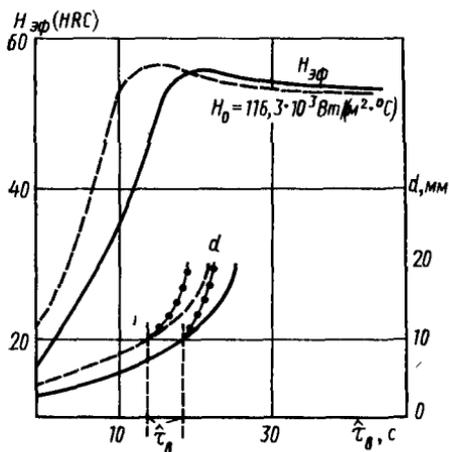


Рис. 3.45. Сравнение  $\theta$ -номограммы с  $d$ -номограммой, учитывающей эффект теплопроводности при охлаждении, при двух скоростях нагрева под закалку (сталь 45,  $R = 20$  мм,  $t_{\text{за}} = 880$  °C,  $f = 2,4$  кГц):  
 —  $t_{\text{н}} = 4$  с; — — — —  $t_{\text{н}} = 20$  с

обнаруживает, что точка максимума  $t_{\text{н},m}^{\text{н}}$  соответствует тому времени выдержки  $t_{\text{в}}$ , которое отвечает началу образования аустенита на некоторой глубине в толще образца уже в стадии охлаждения, т. е. в то время, когда приповерхностные слои быстро охлаждаются, переходя в мартенситное состояние. Видно, что  $t_{\text{н},m}^{\text{н}} \leq t_{\text{в},m}^{\text{н}} < t_{\text{в},1}$ , и заметно меньше  $t_{\text{в},1}$ . Таким образом, оптимальное по твердости время выдержки укладывается в полученный выше диапазон эффективности по оценке глубины закалики.

4. Наблюдаемый на  $\theta$ -номограммах нелинейный рост кривых слева от максимума объясняется суммированием двух процессов, способствующих увеличению статического момента: а) продолжающегося роста толщины полностью закаленного слоя, увеличивающего размеры области максимальной твердости; б) увеличения (какое-то время с ростом  $t_{\text{в}}$ ) встречного теплового потока при быстром поверхностном охлаждении, понижающего скорость охлаждения внутренних слоев и тем самым способствующего расширению переходной зоны, т. е. уменьшению кривизны  $\theta = \theta(r)$  в этой зоне (см. рис. 3.38, 3.39, 3.41).

По мере перехода условной глубины закалики через максимум последний из названных факторов оказывается все меньше и рост твердости с увеличением  $t_{\text{в}}$  замедляется.

Заметим, что приведенные качественные суждения не могут привести к априорному предсказанию существования максимума,

только в результате математического моделирования оказывается возможным обнаружить более тонкие эффекты.

В частности, существование  $H_{эф}^m$  означает, что встречные тепловые потоки, определяющие в конечном итоге существование предельной глубины закалки и соответственно предельной твердости, влияют таким образом, что следующее за максимумом сокращение размеров области максимальной твердости не компенсируется увеличением ширины переходной зоны, что и ведет к уменьшению  $H_{эф}$  при дальнейшем увеличении  $t_v$ .

Эффективная твердость, соответствующая 48 HRC, как показано в работе [69], при испытании цилиндрических образцов диаметра 48 мм, изготовленных из стали 47ГТ, является максимальной, и поэтому дальнейшее увеличение ее больше этого значения не дает увеличения момента упругости и соответственно статической прочности (при этом начинает «течь» металл с поверхности образца). Дальнейшее же упрочнение внутренних слоев образца в этом отношении не обеспечивает прироста прочности, что и следует иметь в виду при использовании номограмм эффективной твердости с целью определения прочности образцов.

По представленным кривым можно судить об эффективности индукционной закалки при заданных параметрах процесса: если  $H_{эф}^m < \hat{H}_{эф}$ , то режим закалки не является оптимальным; при  $H_{эф}^m > \hat{H}_{эф}$  необходимое значение эффективной твердости может быть получено при определенном уменьшении времени выдержки. Следует отметить, что задаваемое значение  $\hat{H}_{эф}$  не должно превышать 48—50 HRC, так как дальнейшее увеличение прочности образца лимитируется прочностью поверхностного слоя.

Еще раз отметим, что обработка температурных полей для получения номограмм, подобных приведенным выше, может быть полностью автоматизирована на ЭВМ при наличии диаграмм фазового состава и термокинетических диаграмм исследуемых сталей.

### **3.6. О ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ, И УПРАВЛЕНИЯ ЭТИМИ ПРОЦЕССАМИ**

Как показано, при математическом моделировании процесса индукционной закалки оказывается эффективной постановка и решение целого ряда обратных задач.

Если допустить, что уже имеется полная информация, необходимая и достаточная для формулировки математической модели процесса, то к числу обратных следует отнести задачи целевого управления процессом. Как показывают результаты математического моделирования, одной из них является задача о получении в результате закалки максимальной глубины закаленного слоя с заданным, не менее чем  $j$ -процентным содержанием мартен-

цита  $\Delta^{(j)}$ . В рассмотренной ситуации величина  $\Delta^{(j)}$  является функционалом от управляющих параметров процесса  $\vec{p} \equiv \{ \hat{t}_н, \hat{t}_в, t_{нв}, H_0 \}$  при заданном законе управления нагревом и заданных параметрах материала. Математическая постановка задачи управления является вариационной, где требуется найти  $\vec{p}^*$  по условию

$$\vec{p}^* = \operatorname{arg\,max} \Delta^{(j)}(\vec{p}), \quad \vec{p} \in P, \quad (3.12)$$

если  $P$  — множество допустимых значений параметров, задаваемое технологическими и эксплуатационными ограничениями.

В этой постановке  $\Delta^{(j)}(\vec{p})$  не задается явным образом, зато известен алгоритм вычисления его значений при каждом заданном  $\vec{p}$ , включающий решение на ЭВМ системы дифференциальных уравнений в частных производных и последующую обработку графика-табличной информации о возможных состояниях материала. В проведенном выше рассмотрении эта постановка реализуется методом подбора с помощью специально разработанных номограмм, в которых в качестве основного параметра выделено время выдержки  $\hat{t}_в$ . Однако современные средства математики дают возможность решать задачу (3.12) в полностью автоматизированном режиме на достаточно мощных ЭВМ, осуществляя при этом оперативное управление технологическим процессом.

То же касается и других, упомянутых выше, постановок задач целевого управления.

Для осуществления второго этапа моделирования, включая назначения алгоритма для вычисления  $\Delta^{(j)}$  и его реализацию на ЭВМ, потребовалось решить на уровне разработки математической модели процесса тем или иным способом три обратные задачи: 1) задачу управления нагревом под закалку, при котором обеспечивается заданный температурный режим поверхности образца; 2) задачу интерпретации данных измерений температуры поверхности на предмет выяснения закона теплообмена (задача об определении параметров граничных условий); 3) задачу об интерпретации данных о температурном поле на предмет выяснения зависимости теплофизических параметров материала от температуры при быстром охлаждении образца (задача об определении коэффициентов дифференциального уравнения). Естественно, что в двух последних случаях были использованы данные специального эксперимента.

Без таких данных, получить которые, однако, проще, нежели провести прямой эксперимент по определению искомых параметров, поскольку речь идет об экспериментальных условиях, — решение обратных задач было бы просто невозможно. С другой стороны, планирование экспериментов по получению такой косвенной информации об искомых величинах совместными усилиями технологов и математиков позволило бы пополнить банк данных

о свойствах материалов, в том числе в экстремальных условиях, обеспечивая тем самым автоматизированное решение задач математического моделирования и управления технологическими процессами.

Аналогично путем постановки и решения специальных обратных задач принципиально возможно пополнение информации о диаграммах состояния различных материалов. Это означало бы, в частности, и расширение области приложений, полученных в работах [23, 67, 62, 69] и изложенных в настоящей главе конкретных численных результатов.

Наконец, метод обратных задач может быть полезен и при проектировании новых конструкций, в частности, связанного с закалкой ВЧ-оборудования. Модель одной из таких конструкций будет рассмотрена ниже.

### 3.7. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОЙ ЗАКАЛКИ ОБРАЗЦОВ, ВРАЩАЮЩИХСЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

#### 3.7.1. Физическое содержание задачи и математическая модель процесса

Пусть длинный стальной цилиндрический образец при нагреве под закалку помещается в индуктор, состоящий из двух параллельных шин, по которым во взаимно противоположных направлениях протекают токи высокой частоты  $\omega$  (рис. 3.46). Эти токи возбуждают в окружающем пространстве электромагнитное поле, которое, проникая в образец, индуцирует в нем токи Фуко, вызывающие нагрев. Из-за скин-эффекта эти токи достигают большой величины в приповерхностных областях образца, особенно вблизи шин индуктора, нагрев же остальных областей происходит в основном за счет теплопроводности стали. Для того чтобы уменьшить неравномерность нагрева образца по поверхности, его вращают с угловой частотой  $\Omega$ , применяя так называемый нагрев «размазыванием».

Последующее охлаждение образца проводится по той же технологии, что и в рассмотренной в п. 3.4 и 3.5 задаче, так что параметры материала и теплообмена на поверхности при быстром охлаждении можно считать такими, какими они были найдены в рассмотренной выше задаче закалки.

Обратимся к построению [62] математической модели процесса нагрева под закалку, излагая ее физические основы

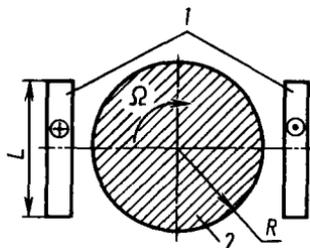


Рис. 3.46. Геометрическая конфигурация рассматриваемой модели:

1 — шины индуктора; 2 — образец

несколько подробнее, чем для задачи нагрева, рассмотренной в п. 3.2. Учитывая то, что образец достаточно длинен, будем строить двумерную модель, причем удобно использовать полярную систему координат. Шины индуктора, имеющие конечные размеры, аппроксимируем бесконечно тонкими лентами шириной  $L$ , отстоящими на расстоянии  $a$  от центра образца (см. рис. 3.46), по которым текут во взаимно противоположных направлениях токи  $\pm I(\tau) e^{i\omega\tau}$ , где  $I(\tau)$  — медленная амплитуда силы тока (квазистационарное приближение).

Для упрощения рассмотрения удобно перейти к вращающейся системе координат, связанной с образцом (рис. 3.46). В силу малой угловой скорости вращения образца ( $\Omega/\omega \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ ) возмущения электромагнитного поля при таком переходе также пренебрежимо малы.

При рабочих параметрах: циклической частоте  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8$  Гц, характерном размере системы  $l \sim 1$  м — можно пренебречь токами смещения во всей области, так как  $l^2 k^2 = l^2 (\omega/c)^2 \sim 10^{-9}$  — малый параметр и оператор Даламбера ( $\Delta + k^2$ ) можно заменить оператором Лапласа вне образца. В этом приближении легко получить электрическое поле индуктора в отсутствие образца [64]

$$\vec{E}_0 = \{0, 0, E_0(r, \varphi)\}:$$

$$E_0(r, \varphi) = I(\tau) f(r, \theta), \quad \theta = \varphi - \Omega\tau,$$

$$f(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi L} \times \quad (3.13)$$

$$\times \int_{-L/2}^{L/2} \ln \frac{r^2 + a^2 + \xi^2 - 2r \sqrt{a^2 + \xi^2} \cos(\theta - \arctg \xi/a)}{r^2 + a^2 + \xi^2 + 2r \sqrt{a^2 + \xi^2} \cos(\theta - \arctg \xi/a)} d\xi,$$

где  $\mu_0$  — начальная магнитная проницаемость.

При получении выражения (3.13) использовалось также предположение, что при помещении образца в индуктор волна, от него отраженная, не вызовет перераспределения токов по шине индуктора; кроме того, считалось, что ток распределен по шине равномерно. Заметим, что интеграл в (3.13) берется аналитически; соответствующего, достаточно громоздкого выражения, доставляющего алгоритм для вычисления  $f$ , здесь не приводим.

Имея аналитическое выражение для  $E_0(r, \varphi)$ , перейдем к постановке задачи о дифракции электромагнитного поля на образце. Пренебрегая явлением ферромагнетизма<sup>1</sup>, будем считать, что характеристики стали зависят лишь от температуры  $t$ . Если, как отмечалось<sup>1</sup>, вне образца ( $r > R$ ) электрическое поле в отсутствии дифракции на шинах подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta E = 0, \quad r > R, \quad (3.14)$$

<sup>1</sup> Так как оно скажется только на глубине проникновения тока, а это компенсируется схемой нагрева индукционным генератором.

то внутри образца ( $r < R$ ) справедливы уравнения Максвелла в пренебрежении токами смещения

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mu(t) \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \sigma(t) \vec{E},$$

где  $\mu(t)$  — относительная магнитная проницаемость;  $\sigma(t)$  — удельная проводимость стали. Учитывая, что подобно току в индукторе все векторы пропорциональны  $e^{i\omega t}$ , для медленных амплитуд, не меняя обозначений, получим систему

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \mu(t) \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \mu(t)}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma(t) \vec{E}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Как было показано в работе [62], без ущерба для точности вычислений можно пренебречь в (3.15) членом, содержащим  $\partial \mu(t)/\partial t$ , так как он отличен от нуля только в районе точки Кюри. Погрешность, вносимая при его опускании, «интегрально мала», а экономия машинного времени из-за упрощения задачи весьма существенна.

Из системы (3.15) легко исключается поле  $\vec{H}$ , и, учитывая, что поле  $\vec{E}$  всюду имеет единственную компоненту  $E$ , параллельную оси образца, приходим к следующей постановке задачи об электрическом поле:

$$N[E, t] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\mu(t)} \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\mu(t)} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right) - \\ - i\omega \mu_0 \sigma(t) E = 0; \quad r < R; \\ E|_{r=R-0} = E|_{r=R+0} + E_0(R, \theta); \\ \frac{1}{\mu(t)} \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=R-0} = \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=R+0} + \frac{\partial E_0}{\partial r}(R, \theta); \\ \Delta E = 0; \quad r > R; \\ \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r}{\mu(t)} \frac{\partial E}{\partial r} = 0; \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} |E| \leq M = \text{const} < +\infty. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Здесь условия сопряжения при  $r = R$  легко получаются на основе непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического и магнитного полей на границе; условия при  $r \rightarrow 0$  и при  $r \rightarrow +\infty$  замыкают систему уравнений, гарантируя естественным образом единственность решения.

Распространение теплоты в детали опишем при помощи уравнения теплопроводности с условиями конвективного теплообмена на поверхности

$$M[t, E] \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \\ + g(t, r, \varphi, I(\tau)) - c(t) \gamma(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad (0 < r < R); \\ \lim_{r \rightarrow +0} r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} = 0; \\ \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} + \hat{H}(t - t^*) = 0 \quad (r = R); \\ t|_{\tau=0} = t^*. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

При этом плотность тепловых источников выражается следующим образом через напряженность электрического поля:

$$g(t, r, \varphi, I(\tau)) = 0,12\sigma(t) |E|^2. \quad (3.18)$$

В уравнениях (3.16)—(3.18) теплофизические и электромагнитные параметры материала как функции температуры те же, что и в предшествующей задаче (см. рис. 3.2). Обозначение  $M[t, E]$  для дифференциального оператора, как и  $N[E, t]$  для формулы (3.16), введено для сокращения дальнейших описаний.

Таким образом, прямая задача о поиске по имеющейся функции  $I(\tau)$  температурных полей  $t(r, \varphi, \tau)$  поставлена, и эта постановка описывается уравнениями (3.13), (3.16)—(3.18).

Хотя подобные нелинейные задачи изучены недостаточно, имеющиеся для линейных и квазилинейных систем [47] результаты дают основание полагать, что эти задачи поставлены корректно по Адамару, т. е.  $t(r, \varphi, \tau)$  существует и определяется однозначно для рассматриваемых классов  $I(\tau)$  и непрерывно зависит от  $I(\tau)$ .

Отметим существенное для последующей разработки алгоритмов (и соответственно структуры программ) отличие модели от предшествующей (см. п. 3.2): она является пространственно-двумерной. То же относится и к фазе охлаждения, в которой хотя и отсутствуют азимутально-несимметричные источники поля ( $g \equiv 0$ ), начальное распределение температуры  $t = t(r, \varphi, \hat{\tau}_{ох})$  зависит от двух пространственных переменных.

Для окончательной формулировки математической модели процесса необходимо решать (возможно параллельно с прямым моделированием) обратную задачу об управлении нагревом под закалку.

...

### 3.7.2. Возможные постановки и алгоритмы решения обратной задачи управления процессом нагрева под закалку

Если положить в основу постановки задачи управления нагревом задание желательного температурного режима поверхности  $t(R, \varphi, \tau) = \Psi(\varphi, \tau)$ , то принципиально возможны два подхода к ее математической формулировке.

1. Искомой характеристикой источника является  $E(R, \varphi, \tau)$  — электрическое поле на поверхности образца. Очевидно, при заданной  $\Psi(\varphi, \tau)$  задача о совместном определении  $E(R, \varphi, \tau) = \lim_{r \rightarrow R} E(r, \varphi, \tau)$  и  $t(r, \varphi, \tau)$  имеет единственное решение.

Поскольку заранее известно, что  $E(R, \varphi, \tau)$  — дифференцируемая функция, определяемая в ограниченной области и ограниченная вместе с первыми производными, то она принадлежит к некоторому компакту, естественно выделяемому дифференциальными уравнениями. В этом случае задача оказывается условно-корректной [46, 86], и ее решение опирается исключительно на разумную реализацию конечно-разностных методов.

2. Пусть необходимо найти управление процессом  $I(\tau)$ , обеспечивающее в рамках заданного в некоторой норме допуска температурный режим поверхности  $\Psi(\varphi, \tau)$ . Такое управление без дальнейшого осложнения модели не может быть связано дифференциальным уравнением, и, следовательно (заранее заданный) естественный компакт отсутствует. Теперь, даже если допустить единственность и существование решения задачи  $\Psi(\varphi, \tau) \rightarrow I(\tau)$ , последнее неустойчиво, поскольку получаемая температура является его интегральным эффектом.

В этом случае для решения задачи неизбежно использование более общих регуляризирующих операторов.

Заметим теперь, что для рассматриваемой задачи, в отличие от предшествующей, первая постановка неестественна, поскольку  $E(R, \varphi, \tau)$  как управляющая функция не реализуема и, с другой стороны, не связана столь непосредственно с током в источнике, как  $H(R, \tau)$  (см. п. 3.3). Для модели [23] эта постановка является альтернативной, хотя и более удобной в практическом плане, чем первая; в рассматриваемой задаче она оказывается единственно возможной. С другой стороны, при втором подходе можно использовать осредняющую характеристику температурного режима поверхности образца.

Введем в рассмотрение среднюю температуру поверхности

$$\bar{u}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(R, \varphi, \tau) d\varphi. \quad (3.19)$$

Это оказывается удобным как в силу того, что требуется возможно более равномерный по  $\varphi$  нагрев, так и в силу того, что  $\bar{u}(\tau)$  — функция одного переменного.

Задача (3.16)—(3.18), описанная в п. 37.1 с последующим вычислением  $\bar{u}(\tau)$  по формуле (3.19), точнее алгоритм решения этой задачи, может рассматриваться как оператор  $A$ , ставящий в соответствие некоторой функции  $I(\tau)$  функцию  $\bar{u}(\tau)$ :  $A[I] \equiv \equiv v[\tau, I(\tau)]$ , где  $v[\tau, I(\tau)]$  — вычисляемая таким образом средняя температура поверхности. Как и выше, уравнение  $v[\tau, I(\tau)] = \bar{u}(\tau)$  при заданной функции  $\bar{u}(\tau)$  не представляет корректной постановки задачи хотя бы по причине неустойчивости. В самом деле большое локальное возмущение тока мало влияет на температурное поле, являющееся интегральным эффектом действия источника, тем более оно слабо влияет на осредненную характеристику  $\bar{u}(\tau)$ , так что введение последней увеличивает степень некорректности постановки задачи решения указанного операторного уравнения.

Если, однако, желаемый температурный режим  $\bar{u}(\tau)$ , например, того же вида, что и в предыдущей задаче, задан с некоторым допуском  $\delta$ , так что при поиске управления  $I(\tau)$  требуется лишь удовлетворить неравенству  $\|v[\tau, I(\tau)] - \bar{u}(\tau)\| \leq \delta$ , то для решения задачи управления можно воспользоваться тем же пошаговым алгоритмом, который был сформулирован для предшествующей задачи.

Рассмотрим другие возможные корректные постановки задачи управления и соответственно регуляризующие алгоритмы ее решения.

Как и прежде, нагрев образца под закалку будем считать состоящим из двух стадий: а) стадии быстрого нагрева  $\tau \in [0, \hat{\tau}_n]$ , во время которой температура поверхности образца быстро растет; б) стадии изотермической выдержки  $\tau \in [\hat{\tau}_n, \hat{T}]$ , во время которой средняя температура поверхности поддерживается постоянной и осуществляется нагрев более глубоких слоев детали за счет теплопроводности. В соответствии с этим делением рассмотрим постановку обратной задачи согласно требованиям, предъявляемым к нагреву на каждой стадии.

На стадии быстрого нагрева поставим задачу нахождения такого управления  $I(\tau) = \hat{I} = \text{const}$ , для которого  $f(I) \equiv \equiv \bar{u}(\hat{\tau}_n, I) = \hat{f}$ , т. е. средняя температура поверхности образца к заданному нами моменту  $\hat{\tau}_n$  равна заранее заданной величине  $\hat{f}$ . Таким образом, задача сводится к решению уравнения

$$f(I) = \hat{f} \quad (3.20)$$

с неявно заданной левой частью, вычисляемой при помощи алгоритма решения прямой задачи (3.13), (3.16)—(3.18). При этом имеется дополнительная практическая информация вида  $0 \leq I \leq M$ , где  $M$  — заранее заданная верхняя граница величины тока. Очевидно, что  $f(0) = t^*$  — температура окружающей среды и  $f(M) > \hat{f}$ . Поскольку функция  $f(I)$  непрерывна, что вытекает из корректности по Адамару постановки прямой задачи,

то при достаточном (и физически естественном) условии ее монотонного роста, обеспечивающем единственность решения, задача (3.20) поставлена корректно.

Для решения уравнения (3.20) оказывается эффективным метод хорд [35], для применения которого необходимо предварительно задать две точки  $I$ , в которых функция  $f(I) - \bar{f}$  имеет противоположные знаки.

В работе [62] для этого предлагается процесс последовательных приближений

$$I^{(p+1)} = \frac{I^{(p)}}{2} \left( 1 + \frac{\bar{f} - f(0)}{f(I^{(p)}) - f(0)} \right). \quad (3.21)$$

С его помощью определяется по условию достаточной близости  $I^{(p)}$  и  $I^{(p+1)}$  значение  $I_1$  при произвольном, например, по порядку величины задаваемом значении  $I_0$ .

Для стадии изотермической выдержки ( $\tau \geq \hat{\tau}_H$ ) задачу о поиске управления  $I(t)$  формулируем аналогично постановке в п. 3.3, требуя выполнения неравенства:

$$\|v[\tau, I(\tau)] - \bar{u}\|^2 \equiv \int_{\hat{\tau}_H}^{\hat{\tau}} \{v[\tau, I(\tau)] - \bar{f}\}^2 d\tau \leq \delta^2, \quad (3.22)$$

где  $\bar{u}(\tau) = \bar{f}$  есть известная константа при  $\tau \geq \hat{\tau}_H$ , а  $\delta$  — заданная мера допуска на отклонение от этой константы.

Рассмотрим различные алгоритмы ее решения, соответствующие различным способам управления технологическим процессом.

1. Непрерывное управление, выбранное для предшествующей задачи, может быть аппроксимировано «мелкоступенчатой» функцией, получаемой, как и ранее (см. п. 3.2), с помощью пошагового регуляризирующего алгоритма. Такой алгоритм применим и к задаче (3.22). Его результат ( $\tilde{I}(\tau)$ ) может быть использован для построения экономичного алгоритма, основанного на других требованиях к управлению.

2. Другим алгоритмом является вторичная аппроксимация найденной непрерывной функции  $\tilde{I}(\tau)$  «крупноступенчатой» с минимальным числом звеньев. Последнее требование соответствует минимуму числа переключений тока при управлении процессом, т. е. может определяться условиями эксплуатации. При такой аппроксимации не только значения тока  $I_k$ , но и моменты переключения  $\tau_k$  являются искомыми величинами. Алгоритм крупноступенчатой аппроксимации определяется следующим образом. Возьмем последовательность целых положительных чисел:  $m = 2, 3, \dots$ . Для каждого  $m$  равномерной сеткой  $\{I_l\}$  разобьем область значений  $\tilde{I}(\tau)$ , так что получим последовательность сегментов  $\eta_l = [\tilde{I}_{l-1}, \tilde{I}_l]$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ , причем  $I_0 = \min \tilde{I}(\tau)$  при  $\tau \in [\hat{\tau}_H, \hat{T}]$ ,  $I_m = \max \tilde{I}(\tau)$  при  $\tau \in [\hat{\tau}_H, \hat{T}]$ . Очевидно, каждый сегмент  $\eta_l$  отображается с помощью функции, обратной

к  $\tilde{I}(\tau)$  (вследствие монотонного убывания  $\tilde{I}(\tau)$ ), в некоторый сегмент  $\kappa_l = [\tau_{l-1}, \tau_l]$  и одновременно определяются границы последнего  $\tau_{l-1}$  и  $\tau_l$ . Каждому  $\kappa_l$  можно сопоставить постоянное значение тока  $I_l = (1/2)(\tilde{I}_{l-1} + \tilde{I}_l)$ . В результате получается некоторая ступенчатая аппроксимация непрерывной функции — множество значений:  $\hat{I}_m \equiv \{\tau_{l-1}, I_l, \tau_l; l = 1, 2, \dots, m\}$ . Описанные только что действия продельваются последовательно для  $m = 2, 3$  и т. д. до тех пор, пока не окажется выполненным условие (3.22) (на этот раз для крупноступенчатых функций). Если это достигается при  $m = m^*$ , то  $\hat{I}_{m^*}$  и является искомой аппроксимацией непрерывного управления. Этот алгоритм также допускает полную автоматизацию на ЭВМ [23], причем неконтролируемо резкие колебания тока на отдельных участках невозможны по самой его конструкции. Возможны и другие варианты метода построения ступенчатой аппроксимации [23, 62]. Как показано в этих работах, нужная точность управления достигается уже при  $m = 3 \div 5$ .

3. Может представлять интерес алгоритм, соответствующий импульсному управлению изотермической выдержкой, также с минимальным числом переключений. В этом случае сила тока не меняется, оставаясь на уровне  $\hat{I}$ , найденном для стадии быстрого нагрева, но вводятся прерывания тока, так что временные интервалы, на которых течет ток, чередуются с интервалами, на которых он отсутствует. Очевидно, что при этом искомыми величинами служат только моменты переключения  $\{\tau_k\}$ , что делает алгоритм весьма экономичным. При реализации такого алгоритма сегмент  $[\hat{\tau}_N, \hat{T}]$  разбивается, как и при поиске непрерывного управления, на достаточно большое число участков  $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $\tau_0 = \hat{\tau}_N$ ,  $\tau_N = \hat{T}$ .

Пусть  $\delta$  — допуск на равномерное (на этот раз) уклонение температуры поверхности от заданной:  $\max_{\tau_H \leq \tau \leq T} \max_{0 < \varphi \leq 2\pi} |t(R, \varphi, \tau) - \hat{T}| \leq \delta$ . Тогда любому объединению  $D_k$  последовательных сегментов  $\Delta_k$  может быть с помощью пропорционального деления  $\delta$  поставлен в соответствие допуск  $\delta_k$ . На первом шаге алгоритма происходит «наращивание» сегмента  $\Delta_0$  присоединением к нему последующих с условием, что на полученном объединении ток равен нулю. Процесс наращивания продолжается до тех пор, пока для рассматриваемого в этом процессе температурного поля выполняется условие допуска (для конкретно заданного примера). Вторым шагом является наращивание тем же способом следующего за полученным объединением частичного сегмента с условием, что на очередном объединении  $I(\tau) = \hat{I}$ ; сигналом к завершению этого шага служит нарушение допуска для уклонения на вновь полученном объединении. Далее повторяется первый шаг для новой последовательности частичных сегментов и т. д.

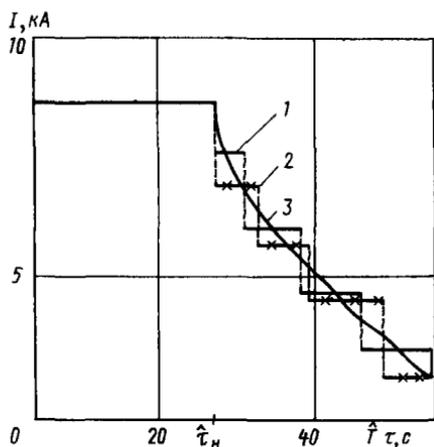


Рис. 3.47. Различные типы уравнения: 1 — ступенчатое (аппроксимация непрерывного); 2 — независимый поиск ступенчатого управления; 3 — непрерывное

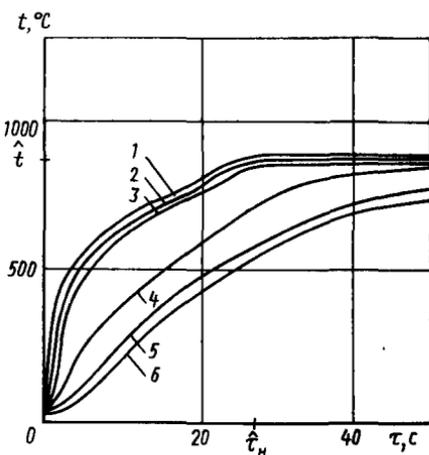


Рис. 3.48. Температурные поля при  $\hat{\tau}_n = 27$  с,  $\hat{T} = 55$  с:

1—3 — соответственно максимальная, средняя по азимуту, минимальная температуры на поверхности ( $R = 24$  мм); 4—6 — средняя по азимуту температура при  $r$ , равном соответственно 16, 4; 8, 2 и 0 мм

Очевидно, алгоритм импульсного управления также исключает неустойчивость (по своей конструкции) и потому является регуляризирующим.

С математической точки зрения оба последних метода связаны с алгоритмической конструкцией компакта.

Болеe интересным является то, что общий регуляризационный подход, поиск приближения на некотором компакте — позволяет построить различного типа управления, из которых технолог может выбрать наиболее подходящее из имеющихся в его распоряжении для реализации в конкретных условиях. Этот факт в равной мере относится и к предшествующей задаче.

Результаты решения задач управления индукционным нагревом различных типов представлены в графической форме. На рис. 3.47 изображено найденное [62, 64] ступенчатое управление в сравнении с непрерывным (кривая 3). И то и другое получено при следующих значениях параметров: сталь 40,  $f = 2,5$  кГц,  $\hat{\tau}_n = 27$  с,  $\hat{t}_{на} = 870$  °С,  $t^* = 20$  °С,  $R = 24$  мм,  $a = 27$  мм,  $L = 28$  мм,  $\Omega = 2\pi \cdot 0,5$  Гц. Ступеньки, изображенные сплошной кривой 1, соответствуют описанному выше алгоритму (кривая 2); крестиком обозначен результат формальной выборки последовательности пар  $(I_s, \varphi_s)$ , организация которого подобна описанной для импульсного алгоритма. Температурные поля при всех трех управлениях почти неразличимы графически. На рис. 3.48 представлены температурные поля, отвечающие кривой 2 на рис. 3.47; здесь даны зависимости максимальной, средней,

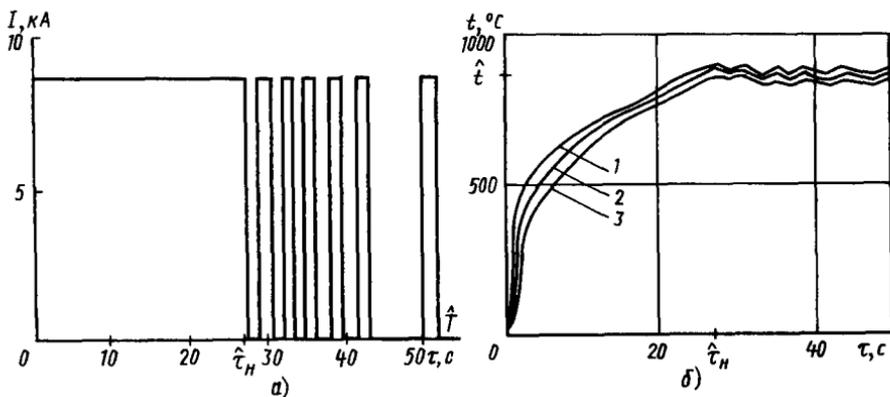


Рис. 3.49. Импульсное управление нагревом (а) и соответствующая температура поверхности (б):

1—3 — максимальная, средняя и минимальная температуры

минимальной температур поверхности (кривые 1—3 соответственно), средних по ф температур при  $r = 16,4$  и  $8,8$  мм и температуры в центре (кривые 4—6 соответственно) от времени.

Найденное в работе [62] импульсное управление и полученное в этом случае температурное поле ( $\delta = 25$   $^\circ\text{C}$ ) представлены на рис. 3.49, а, б.

Выбор одного из возможных способов управления с помощью описанных алгоритмов завершает формулировку математической модели управления. Способ управления зависит и от имеющихся технических средств. Например, наличие электромашинного усилителя с обратной связью дает ступенчатое регулирование, а современный программируемый контроллер на базе микропроцессора обеспечивает достаточно плавное и непрерывное регулирование.

### 3.7.3. Об алгоритмах решения задачи прямого моделирования

В предшествующем пункте неявно предполагалось, что алгоритм решения прямой задачи, в частности, при нагреве при любой заданной силе тока в индукторе разработан и реализован математиком в некоторой программе для ЭВМ, так что имеется готовый «инструмент» для получения температурного поля.

Остановимся теперь кратко на возможных математических алгоритмах решения задачи, основанных на конечно-разностных методах. Это известная и широко используемая методика, что не означает, однако, существования сколько-нибудь универсальных программ, пригодных в любой ситуации. Обычно математик каждый раз строит наиболее экономичный для решаемой задачи алгоритм, основанный на применении разностных методов. Такая

работа особенно важна при недостатке информации, когда приходится решать обратные задачи.

Введем, как и раньше, сетку значений  $\{\varphi_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , независимую от разбиений, выбираемых при построении алгоритмов решения задач управления нагревом, и с числом точек, значительно превосходящим их число в упомянутых разбиениях. Тогда решение системы (3.16)—(3.18) аппроксимируется последовательностью пар функций  $(t^j, E^j)$ , а производные по времени заменяются разностными отношениями. Пользуясь, как и раньше, неявными, абсолютно устойчивыми схемами, мы должны решать на очередном  $j$ -м временном слое некоторую систему аппроксимирующих алгебраических уравнений относительно  $(t^j, E^j)$ , используя как известные значения этой пары на предшествующем слое с номером  $j-1$ .

Заметим теперь, что, как и в предшествующей задаче, системы (3.16) и (3.17) нелинейно связаны зависимостью характеристик стали от температуры  $t$  и для совместного их решения на каждом временном слое  $\varphi_j$  целесообразно ввести расчеты по описанной в п. 3.3 итерационной схеме, аналогичной [69]:

$$E: N[E, t^{(s-1)}] = 0; \quad (3.23)$$

$$t: M[t, E^{(s)}] = 0, \quad s = 1, 2 \dots$$

при  $t^{(0)}$ , взятом с временного слоя,  $\varphi = \varphi_{j-1}$ . Эта схема разделяет на каждом шаге задачи о нахождении полей  $E$  и  $t$  и позволяет для каждого из шагов пользоваться независимыми алгоритмами. Этот процесс последовательных приближений итераций прерывается, как обычно, либо при достижении индексом  $s$  некоторого наперед заданного числа, либо при выполнении условия

$$\max_r \left| t^{(s)}(r, \varphi_j) - t^{(s-1)}(r, \varphi_j) \right| \leq \varepsilon \max_r \left| t^{(s)}(r, \varphi_j) \right|,$$

где  $\varepsilon$  также задано.

Следует иметь в виду, что в формулах (3.23) индекс  $s$  не совпадает, вообще говоря, с индексом  $j$ , почему он и поставлен в круглые скобки. Совпадение относится только к начальному  $(t^{(0)}, E^{(0)})$  и конечному приближению. Если процесс прерывается при  $s \neq 1 = s^*$ , то принимаем  $t = t^{(s^*)}$  и  $E = E^{(s^*)}$ .

Обратимся к алгоритмам решения каждого из разделенных описанным итерационным процессом уравнений (3.16) и (3.17).

Задачу о температурном поле удобно решать с помощью метода переменных направлений [73]. В этом методе при переходе от  $(j-1)$ -го временного слоя к  $j$ -му вводится промежуточный с индексом  $j - (1/2)$ , и пересчет между слоями проводится в два этапа. Например, сначала на промежуточном слое температура

определяется как функция только  $r$ , тогда как зависимость ее от  $\varphi$  считается известной по  $(j-1)$ -му слою; затем на  $j$ -м слое температура рассматривается как функция  $\varphi$ , а зависимость ее от  $r$  берется с промежуточного слоя.

Опуская для краткости записи индексы, относящиеся к временным слоям, обозначаем через  $t$  температуру на  $(j-1)$ -м слое, через  $\bar{t}$  — температуру на промежуточном, через  $\bar{\bar{t}}$  — температуру на  $j$ -м слое; аналогичные обозначения примем впоследствии и для других физических величин. Введем пространственную сетку

$$r_i = \Delta r \left( i - \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad \Delta r = R \left/ \left( N_r - \frac{1}{2} \right) \right.;$$

$$\varphi_l = \Delta \varphi l, \quad l = 1, 2, \dots, N_\varphi, \quad \Delta \varphi = 2\pi/N_\varphi.$$

Используем для любого временного обозначения

$$t_{i,l} = t(r_i, \varphi_l, \vartheta); \quad g_{i,l} = g(r_i, \varphi_l, \vartheta);$$

$$a_{i,l}(t) = r_{i-\frac{1}{2}} \lambda \left( \frac{t_{i,l} + t_{i-1,l}}{2} \right); \quad b_{i,l}(t) = \lambda \left( \frac{t_{i,l} + t_{i,l-1}}{2} \right);$$

$$\Psi = \begin{cases} g_{i,l} & i = 1, 2, \dots, N_{r-1}; \\ g_{i,l} + \frac{R\hat{H}t^*}{\Delta r \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right)}, & i = N_r, \end{cases}$$

где добавочный член при  $i = N_r$  связан с аппроксимацией граничного условия теплообмена при  $r = R$ . С нею связано и появление еще одного оператора

$$qt = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, N_{r-1}; \\ R\hat{H}t_{N_r} \left/ \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \Delta r, & i = N_r. \end{cases}$$

Введем, наконец, обозначения для аппроксимаций пространственных производных разностными отношениями с использованием в крайних узлах граничных по  $r$  условий:

$$\Lambda_r t = \begin{cases} \frac{1}{r_1 (\Delta r)^2} a_{2,1}^{(s)}(t) (t_{2,1} - t_{1,1}), & i = 1; \\ \frac{1}{r_i (\Delta r)^2} [a_{i+1,i}^{(s)}(t) (t_{i+1,i} - t_{i,i}) - a_{i,i}^{(s)}(t) (t_{i,i} - t_{i-1,i})]; \\ & i = 2, 3, \dots, N_{r-1}; \\ -\frac{1}{\left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) (\Delta r)^2} a_{N_r,1}^{(s)}(t) (t_{N_r,1} - t_{N_{r-1},1}), & i = N_r; \end{cases}$$

$$\Lambda_\varphi t = \frac{1}{(r_i)^2 (\Delta \varphi)^2} [b_{i,l+1}^{(s)}(t) (t_{i,l+1} - t_{i,l}) - b_{i,l}^{(s)}(t) (t_{i,l} - t_{i,l-1})],$$

где  $i = 1, 2, \dots, N_r$ , где  $\bar{r}_i = r_i$ , если  $i \neq N_r$  и  $\bar{r}_i = R - (\Delta r/4)$ , если  $i = N_r$  (поправка, повышающая точность аппроксимации).

Теперь система алгебраических уравнений, аппроксимирующая дифференциальное уравнение на каждой  $s$ -й итерации, и притом с точностью порядка  $(\Delta \tau^2 + \Delta r^2 + \Delta \Phi^2)$ , кратко записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{c}\bar{y} \frac{\bar{r}-i}{0,5\Delta\tau} &= \bar{\Lambda}_r \bar{r} + \Lambda_\Phi i - q\bar{r} + \bar{\Psi}; \\ \bar{c}\bar{y} \frac{\bar{r}-i}{0,5\Delta\tau} &= \bar{\Lambda}_r \bar{r} + \hat{\Lambda}_\Phi i - q\bar{r} + \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Точность аппроксимации с присоединением граничных условий периодичности по  $\Phi$ , не учтенных при записи конечно-разностных операторов, в приграничных узлах, в отличие от условий по  $r$ , условия периодичности по  $\Phi$  аппроксимируются формулами  $\hat{t}_{i,0} = t_{i,N_\Phi}$  и  $\hat{t}_{i,1} = t_{i,N_\Phi+1}$ .

Полученные алгебраические уравнения решаются отдельно: первое методом «прогонки» по  $r$ , как и для закалки в соленоидальном индукторе; второе — методом циклической прогонки [74].

Задача нахождения электрического поля из (3.16) оказывается значительно более сложной, так как система (3.16) представлена уравнениями эллиптического типа с комплекснозначным оператором в неограниченной области и относится к классу задач, разностные методы для которых разработаны в меньшей степени. Кроме того, из-за зависимости электромагнитных характеристик образца от температуры переменные в задаче (3.16) при  $r < R$  не разделяются, что не позволяет применять для решения системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующей задачу (3.16), быстрые прямые методы типа дискретного преобразования Фурье, метода полной редукции [19]. Таким образом, возникает необходимость применения итерационных алгоритмов.

Для получения конечно-разностной аппроксимации задачи (3.16) введем сетку

$$\begin{aligned} r_i &= \bar{\Delta r} \left( i - \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_r; \\ r_i &= R + \sum_{s=N_{r+1}}^1 \bar{\Delta r}^{s-N_{r-1}} \bar{\Delta r}, \quad i = N_{r+1}, \dots, \bar{N}_r, \end{aligned}$$

где  $\bar{\Delta r} = R/(N_{r-1})$ , которая задает равномерный шаг по радиусу внутри образца, во вне которого шаг растет как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{\Delta r}$ . Граница образца  $r = R$  попадает на середину интервала сетки по  $r$ , что обеспечивает аппроксимацию условий сопряжения со вторым порядком точности.

Для операторов, аппроксимирующих дифференциальные операторы, введем обозначения, аналогичные тем, что использовались

лись для уравнения теплопроводности, но с отличием в коэффициентах; в  $\Lambda_r E$  вместо  $a_{i,l}$  подставляется коэффициент  $\alpha_{i,l} = r_{i-\frac{1}{2}} / \left[ \mu \left( \frac{t_{i,l} + t_{i-1,l}}{2} \right) \right]$ ; в  $\Lambda_\varphi E$  вместо  $b_{i,l}$  входит коэффициент  $\beta_{i,l} = 1 / \left[ \mu \left( \frac{t_{i,l} + t_{i,l-1}}{2} \right) \right]$ .

Точно так же для конечно-разностных аппроксимаций операторов в окружающем пространстве  $\Lambda_r E$  и  $\Lambda_\varphi E$  имеет место замена прежних коэффициентов ( $a_{i,l}$  и  $b_{i,l}$ ) на единицы. Учитывая, что для поля индуктора  $E_0(r, \theta)$  и соответственно его производной имеются аналитические выражения, аппроксимирующую систему линейных алгебраических уравнений можно теперь записать в виде

$$\Lambda_r E + \Lambda_\varphi E - g(t) E = 0 \quad (1 \leq i \leq N_r); \quad (3.25a)$$

$$\Lambda_r^* E^* + \Lambda_\varphi^* E^* = 0 \quad (N_r < i < \bar{N}_r); \quad (3.25б)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_{N_{r-1,l}} + E_{N_{r,l}}}{2} &= \frac{E_{N_{r-1,l}}^* + E_{N_{r,l}}^*}{2} + E_0(R, \theta), \\ \frac{1}{\mu(t)} \frac{E_{N_{r,l}} - E_{N_{r-1,l}}}{2} &= \frac{E_{N_{r,l}}^* - E_{N_{r-1,l}}^*}{2} + \frac{\partial E_0}{\partial r}(R, \theta); \end{aligned} \right\} (3.25в)$$

$$E_{0,i} = E_{1,i}, \quad E_{\bar{N}_{r-1,l}}^* = E_{N_{r,l}}^* \quad (l = 1, \dots, N_\varphi); \quad (3.25г)$$

$$E_{i,0} = E_{i,N_\varphi}, \quad E_{i,1} = E_{i,N_{\varphi+1}} \quad (i = 1, \dots, \bar{N}_r), \quad (3.25д)$$

где  $g(t) = i\omega\mu_0\lambda(t)$  ( $i$  — мнимая единица). Здесь (3.25г) аппроксимирует условия сопряжения, через  $E^*$  обозначено поле при  $r > R$  ( $i = N_{r+1}, \dots, \bar{N}_r$ ). Заметим, что если из (3.25в) исключить  $E_{N_{r-1,l}}^*$  для всех  $l$ , то образующееся уравнение замыкает, «сшивает» систему уравнений (3.25а) и (3.25б). Условия (3.25г) заменяют соответствующие условия при  $r \rightarrow 0$  и при  $r \rightarrow +\infty$  в (3.16), условия (3.25д) являются условиями периодичности решения по азимуту.

Таким образом, система разностных уравнений построена и возникает вопрос об алгоритме ее решения.

Метод переменных направлений, модифицируемый для подобного класса комплексно-значных систем, непосредственно неприменим (из-за «неперестановочности» операторов  $\Lambda_r$  и  $\Lambda_\varphi$  [74]). Наиболее эффективным оказывается модифицированный применительно к рассматриваемой системе метод простой итерации. Удобство его использования связано с тем, что коэффициенты в уравнениях, хотя и зависят от температуры, но не зависят от поля  $E$ ; поэтому на каждом шаге итерационного цикла, разделяющего оба поля, система (3.16) оказывается линейной относительно  $E$ .

Запишем эту систему в матричной форме:  $CE = 0$ , где  $C$  — матрица соответствующего порядка, а  $E$  — вектор (набор значений поля на введенной сетке). Пусть  $D$  — диагональная матрица, составленная из диагональных элементов  $C$  ( $D = \text{diag } C$ ). Введем еще номер итерации  $k$  и параметр метода  $\Delta$ . Тогда процесс последовательных приближений в методе простой итерации записывается формулой

$$D \frac{E^{(k+1)} - E^{(k)}}{\Delta} + CE^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \\ E^{(0)} \equiv 0. \quad (3.26)$$

В расчетах, приведенных в работе [62], параметр схемы  $\Delta$  был выбран равным единице.

### 3.7.4. Некоторые результаты математического моделирования процесса закалки в ленточном индукторе

Вряд ли есть основание сомневаться в том, что и при нагреве в индукторе нового типа номограммы закалки обладают теми же свойствами, что и в рассмотренной выше задаче, ведь их поведение определяется физикой процессов в условиях технологии приповерхностного нагрева и поверхностного охлаждения, которая не изменилась. И в данном случае такого рода номограммы могли бы служить целям оптимального проектирования, а программа, моделирующая процесс, — целям автоматизированного управления.

Для рассматриваемой конструкции индуктора на первый план выдвигается другой вопрос: при каких параметрах режима можно добиться равномерного по азимуту закаливания образца? Если какие-либо параметры не допускают существенной вариации по техническим условиям (как, например, частота вращения образца), то тот же вопрос сводится к другому: можно ли при заданных параметрах добиться желаемого эффекта? Последнее важно для определения альтернативного решения в реальном производстве.

Математический эксперимент, проводимый на основе разработанной модели процесса, позволяет дать ответ на эти вопросы без затрат, связанных с физическим экспериментированием в условиях производства или специальных лабораторных.

Можно заранее утверждать, что результат такого эксперимента слабо зависит от способа управления нагревом, поскольку при любом таком способе обеспечивается один и тот же осредненный температурный режим поверхности. Этот факт также проверен расчетами на ЭВМ, и все нижеприведенные результаты относятся к режиму «непрерывного» управления током; соответствующие иллюстрации даны для образца радиусом 24 мм при  $a = 27$  мм,  $L = 28$  мм,  $\Omega = 2\pi \cdot 0,5$  Гц,  $\omega = 2\pi \cdot 2,5$  кГц; пара-

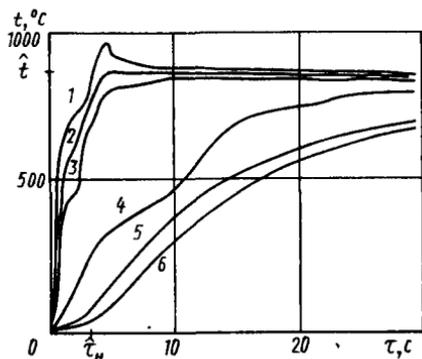


Рис. 3.50. Температурные поля при быстром нагреве ( $\hat{t}_H = 4$  с,  $T = 29$  с): 1-3 — максимальная, средняя по азимуту и минимальная температуры поверхности ( $r = R$ ); 4-6 — средняя температура при  $r$ , равном 16,4; 8,2 и 0 мм

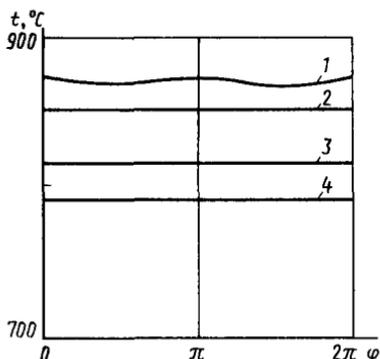


Рис. 3.51. Зависимость температуры образца от азимута при  $\hat{T} = 55$  с: 1 —  $r = R = 24$  мм (поверхность); 2 —  $r = 16,4$  мм; 3 —  $r = 8,2$  мм; 4 —  $r = 0$  (ось)

метры  $\hat{t}_H$  и  $\hat{t}_B$  варьируются, причем последний, как и прежде, выбран в качестве основного для номограмм.

Поведение температурных полей при различных  $\hat{t}_H$  и  $\hat{T} = \hat{t}_H + \hat{t}_B$  представлено на рис. 3.48 и 3.50. Видно, что при заданных прочих параметрах неравномерность нагрева в начале процесса возрастает с уменьшением времени первой его стадии ( $\hat{t}_H$ ), что имеет очевидное физическое объяснение, ведь уровень изотермы, достигаемый за это время, остается неизменным по постановке задачи; с другой стороны, неравномерность нагрева естественным образом уменьшается с увеличением времени выдержки.

На рис. 3.51 изображены зависимости температурных полей от азимута на различных глубинах для одного из режимов в ко-

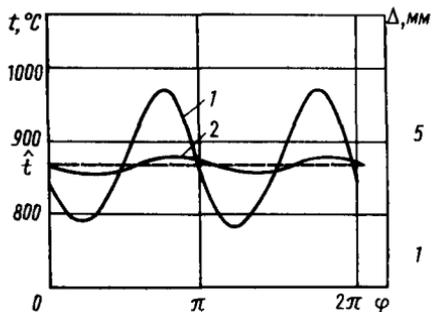


Рис. 3.52. Влияние  $\hat{t}_H$  на неравномерность температуры:

1 —  $v = \hat{t}_H = 27$  с; 2 —  $v = \hat{t}_H = 4$  с

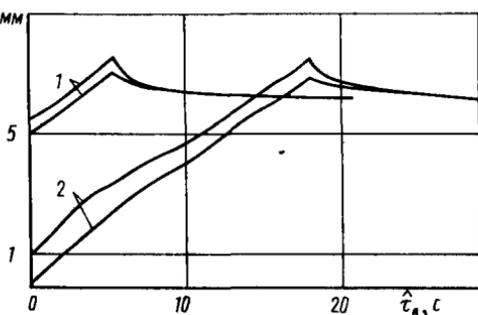


Рис. 3.53. Зависимость максимальной и минимальной толщины закаленного слоя от времени изотермической выдержки  $\hat{t}_B$ :

1 —  $\hat{t}_H = 27$  с; 2 —  $\hat{t}_H = 4$  с

нечный момент времени. Видно, что заметная еще неравномерность распределения поля относится только к приповерхностным слоям и быстро затухает в более глубоких, разогреваемых за счет теплопроводности. С помощью рис. 3.52 можно судить о том, каким образом влияет на неравномерность нагрева продолжительность начальной стадии (величина  $t_n$ ).

На рис. 3.53 для обоих режимов нагрева изображены номограммы закалки, соответствующие 100 %-ному содержанию мартенсита ( $\Delta(t_n)$ ). Они получены с помощью той же обработки результатов, что и в п. 3.4 [23, 69]. Подтверждается теперь уже ожидаемый эффект, касающийся их основного поведения: наличие точки максимума закаленного слоя при прочих заданных параметрах режима и невозможность сквозной закалки образца при этих параметрах. С другой стороны, из номограммы, где изображены зависимости, соответствующие минимальному и максимальному значению температуры, видно, что закаленный слой имеет неравномерную толщину по азимуту. Если бы нас слишком беспокоила неравномерность его в пределах, фиксируемых номограммами, то точку максимума можно было бы назначить в качестве ориентира при управлении закалкой в реальном процессе. Если же для последующей эксплуатации деталей важна большая равномерность закаленного слоя, то в качестве оптимального времени выдержки следует принять несколько большую величину по сравнению с точкой максимума, и  $\Delta$ -номограммы дают для нее оценку.

Очевидно также, что математическое моделирование процесса возможно в более широком диапазоне параметров. В этом случае оно позволило бы дать сравнительную оценку эффективности рассмотренных конструкций индуктора при той же технологии процесса и определить эффективные области применения каждого.

### О ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ЦЕМЕНТАЦИИ СТАЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ

---

Цементация является одним из способов химико-термической обработки деталей, предназначенным для их упрочнения. Сущность этого процесса состоит в насыщении углеродом поверхностных слоев заготовки, помещаемой при высокой температуре в среду, содержащую соединения углерода. Последние способны адсорбироваться на поверхности и диссоциировать с выделением атомарного углерода, диффундирующего в объем.

Различия в прочностных характеристиках деталей связаны с различным распределением углерода в прилежащих к поверхности слоях, которое тем самым может служить косвенной характеристикой прочностных свойств изделия. Существуют и уточняются практикой общие критерии качества цементации: заданная концентрация углерода на поверхности 0,7—0,8 %, оценка глубины насыщаемого слоя по содержанию углерода — не менее 0,4 %, падение концентрации углерода — не более чем на 10 % на 1/3 глубины насыщаемого углеродом слоя (при обработке под закалку): оценка допустимых колебаний концентрации углерода по всей глубине на уровне  $\pm 0,05$  % и т. п. Существование таких критериев позволяет ставить задачи управления процессом цементации.

Однако повышение эффективности управления этим технологическим процессом связано с учетом более тонких физических эффектов особенно в условиях расширения ассортимента материалов, предназначенных для цементации. Для этого требуются более точные, по сравнению с традиционными, инженерно-физические расчеты, для чего и ставится задача математического моделирования процесса на ЭВМ.

#### 4.1. ЦЕЛЕВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ЦЕМЕНТАЦИИ

Целью математического моделирования и проводимых на его основе математических экспериментов может быть разработка номограммы различных уровней, связывающих управляющие процессом параметры с выходными характеристиками качества

цементации. Такие номограммы, получаемые обработкой численных результатов математического эксперимента, могут экономизировать работу на уровне проектирования технологического процесса в конкретных производственных условиях.

С другой стороны, программы для ЭВМ, реализующие математическую модель процесса, могут служить составной частью систем, управляющих процессом в реальном времени, поскольку машинное время воспроизведения результата цементации при заданных управляющих параметрах значительно меньше реального времени цементации.

Все это предполагает, однако, что выбранная математическая модель процесса цементации адекватна тому, что происходит на самом деле. Вместе с тем прямое математическое моделирование процесса можно использовать в целях выявления новых эффектов, связанных, например, с использованием новых материалов, а также для проверки гипотез относительно диффузионной активности углерода в различных материалах. В настоящей главе рассмотрим такую задачу.

В тех случаях, когда недостаток информации о физических параметрах процесса не позволяет формулировать однозначно его модель и соответственно реализовать прямое моделирование, прибегают к методу обратных задач, с помощью решения которых, как и в других прикладных областях, на основе интерпретации данных косвенных наблюдений разыскиваются недостающие параметры. Некоторые из таких задач, решенных в работах [65, 53], будут рассмотрены в заключительных пунктах данной главы.

## **4.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЦЕМЕНТАЦИИ В КОМПАКТНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

### **4.2.1. Физические предпосылки и математическая модель процесса диффузии**

На заводах объединения ПО ЗИЛ для цементации используют обычно газовую среду на базе основного носителя — эндогаза (40 %  $N_2$ , 40 %  $H_2$ , 20 %  $CO$ ), создаваемого в отдельном агрегате и поступающего централизованно из сети. В этом случае посредством изменения концентрации углеродных соединений и температуры среды легче регулируется концентрация углерода в цементируемых слоях.

В дальнейшем будем рассматривать только такую технологию цементации. Сформулируем основные предположения, на которых строится математическая модель процесса.

1. Поскольку глубина цементируемого слоя много меньше не только габаритных размеров детали, но в большинстве случаев и локального радиуса кривизны ее поверхности, то можно ограничиться моделью массопереноса в некоторый слой толщиной  $2l$

через две параллельные плоскости. Возможно и дальнейшее упрощение, приводящее к уравнению диффузии в полупространстве.

2. Так как скорость передачи теплоты в металлах значительно больше скорости диффузии углерода в аналогичной среде, то при известном законе изменения температуры внешней среды температурное поле на глубинах порядка толщины цементуемого слоя практически совпадает с текущей температурой внешней среды. Поэтому будем рассматривать изолированное уравнение диффузии с коэффициентами, зависящими от температуры как от параметра.

3. Известно, что интенсивность процесса диффузии определяется не только температурой  $t$ , но и концентрацией углерода  $C = C(x, \tau)$ <sup>1</sup>, и эта зависимость нелинейна. Следовательно, коэффициент диффузии, а вообще говоря, и кинетический коэффициент — функции концентрации.

При этих предположениях математическая модель процесса при заданных функциональных параметрах материала задается условиями:

$$\begin{aligned} C_{\tau} &= (D(C) C_x)_x; & 0 < x < l, & & 0 < \tau < t; \\ C|_{\tau=0} &= \hat{C}_0(x); & D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \beta(C) (C - C_{\text{окр}})|_{x=0}; & (4.1) \\ & & \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0, \end{aligned}$$

где  $D(C)$  — коэффициент диффузии;  $\beta \geq \beta_0 > 0$  — кинетический коэффициент массообмена с газовой средой;  $C_{\text{окр}}$  — углеродный потенциал среды, зависящий, вообще говоря, от времени;  $\hat{C}_0(x)$  — начальное содержание углерода ( $\hat{C}_0 < C_{\text{окр}}$ ).

Для ряда компактных материалов известны формулы, достаточно хорошо аппроксимирующие физические параметры материала  $D$  и  $\beta$ . Так, для  $\gamma$ -железа

$$\begin{aligned} D &= (0,04 + 0,08C) \exp(-31\,350/1,987t_k); \\ \beta &= 1,36 \cdot 10^{-3} \exp(-11\,100/1,987t_k), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, см<sup>2</sup>/с;  $\beta$  — коэффициент массообмена, см/с;  $t_k$  — температура, К.

Задача (4.1) может быть решена на ЭВМ с помощью неявной нелинейной конечно-разностной схемы [73], включающей использование метода прогонки в итерационном цикле. Краткое описание соответствующего комплекса алгоритмов дадим в следующем пункте. Сейчас отметим, что программа для ЭВМ, реализующая такой комплекс, служит датчиком поля концентраций в нелинейном процессе диффузии при любых заданных параметрах.

<sup>1</sup> Более строго интенсивность процесса диффузии определяется не концентрацией, а термодинамической активностью углерода, но поскольку для модели это не имеет значения, для простоты анализа используем концентрацию.

трах материала ( $D, \beta, \hat{C}_0$ ) и управления ( $i, C_{\text{опр}}$ ). Использование такой программы может служить, в частности, целям контроля за распределением углерода по толщине слоя в нелинейном процессе, что особенно важно для сталей с ограниченной прокаливаемостью на уровне проектирования процесса.

#### 4.2.2. Комплекс математических методов для моделирования процесса

Как обычно, искомое решение  $C(x, \tau)$  задачи (4.1) аппроксимируется сеточной функцией  $\{C_{ij} = C(x_i, \tau_j)\}$ , значения которой относятся к узлам сетки  $x_i = i\Delta x, \tau_j = j\Delta \tau$ , где  $\Delta x = l/[N + (1/2)], i = 0, 1, \dots, N, \Delta \tau = \tau/M, j = 0, 1, \dots, M, x_0 = 0, \tau_0 = 0$ .

Расчет зависимости концентрации от времени сводится к пересчету с  $j$ -го временного слоя на  $(j+1)$ -й, осуществляемому одношаговой процедурой, поскольку значения сеточной функции на начальном слое известны:  $C_{i0} = \hat{C}(x_i)$ .

Эта процедура сводится к комплексу алгоритмов, разрешающих нелинейную систему алгебраических уравнений, аппроксимирующую задачу (4.1). Пометив верхним индексом  $j$  уже найденные значения, относящиеся к предшествующему временному слою, можем записать аппроксимирующую систему для значений  $C_i$  в следующем слое в виде

$$\frac{C_i - C_i^j}{\Delta \tau} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{a_{i+1}(C_{i+1}, C_i)(C_{i+1} - C_i) - a_i(C_i, C_{i-1})(C_i - C_{i-1})\},$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

$$a_1(C_1, C_0) \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} = \beta(C_0 - C_{\text{опр}}); \quad C_{N+1} = C_N,$$

где последние два уравнения — приближенная запись граничных условий:  $a_i(C_i, C_{i-1}) \equiv D \left( \frac{C_i + C_{i-1}}{2} \right), \quad a_{i+1}(C_{i+1}, C_i) \equiv D \left( \frac{C_{i+1} + C_i}{2} \right).$

Упомянутый комплекс состоит из двух алгоритмов.

1. Для преодоления нелинейности используют метод последовательных приближений (итерационный цикл). При этом в качестве начального приближения  $C_i^{(0)}$  задается значение сеточной функции на предшествующем временном слое  $C_i^{(0)} = C_i^j$ ; после подстановки начального приближения в коэффициенты уравнения  $a_{i+1}, a_i$  получаем уже линейную систему для определения первого приближения. Точно так же, если уже найдено  $s$ -е приближение  $C_i^{(s)}$ , то, полагая  $a_i = a_i(C_i^{(s)}, C_{i-1}^{(s)})$  и  $a_{i+1} = a_{i+1}(C_{i+1}^{(s)}, C_i^{(s)})$ , получаем линейную алгебраическую систему для определения очередного  $(s+1)$ -го приближения. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса дело сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, и если выбран метод решения последней, любое приближение может быть найдено. Этот итерационный процесс заканчивается по условию  $\max_i |C_i^{(s+1)} - C_i^{(s)}| \leq \varepsilon \max_i |C_i^{(s+1)}|$ , где  $\varepsilon$  — заданная относительная точность результата.

2. Линейная система алгебраических уравнений, получающаяся на каждом шаге итерационного цикла, решается методом прогонки [73], который состоит в следующем. Нетрудно заметить, что линеаризованную в итерационном цикле систему можно сокращенно переписать в виде  $A_i C_{i+1} + B_i C_i + D_i = F_i, i = 1, 2, \dots, N$ , где  $A_i, B_i, D_i, F_i$  уже не содержат искомых неизвестных. Входные сюда значения  $C_0$  (при  $i = 1$ ) и  $C_{N+1}$  (при  $i = N$ ) легко выражаются

из граничных условий через другие неизвестные:  $C_{N+1} = C_N$ ,  $C_0 = \left( C_{\text{окр}} + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} C_1 \right) / \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} \right)$ .

Допустим, что решение системы может быть записано в виде  $C_i = \alpha_{i+1} C_{i+1} + \beta_{i+1}$  для каждого  $i$ , где  $\alpha_{i+1}$ ,  $\beta_{i+1}$  — неопределенные пока коэффициенты. Для определения последних подставим в систему выражения  $C_{i-1} = \alpha_i C_i + \beta_i$  и  $C_{i+1} = (C_i - \beta_{i+1}) / \alpha_{i+1}$ , вытекающие из нашего допущения. Тогда система будет иметь вид

$$\left( \frac{A_i}{\alpha_{i+1}} + B_i + D_i \alpha_i \right) C_i + \left( D_i \beta_i - \frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} A_i - F_i \right) = 0.$$

Поскольку  $\{C_i\}$  — решение, следовательно, получено тождество, а это возможно лишь в том случае, если обе скобки обращаются в нуль. Последнее требование приводит к расчетным формулам для неопределенных коэффициентов:

$$\alpha_{i+1} = - \frac{A_i}{B_i + D_i \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - D_i \beta_i}{B_i + D_i \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Это рекуррентные соотношения («прямой прогонки» от 1 к  $N$ ), которыми можно воспользоваться, если задать заранее значения  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ . Последние получаются из краевого условия (связь между  $C_1$  и  $C_0$ ) на левом конце и нашего допущения о выражении  $C$  через  $\{\alpha_i, \beta_i\}$ :

$$C_0 = \left[ \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} / \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} \right) \right] C_1 + \left[ C_{\text{окр}} / \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} \right) \right] \equiv \alpha_1 C_1 + \beta_1.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} / \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} \right), \quad \beta_1 = C_{\text{окр}} / \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \Delta x} \right).$$

С этим дополнением формулы (4.4) позволяют рассчитать последовательно все значения  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  вплоть до  $\alpha_{N+1}$ ,  $\beta_{N+1}$ . Последняя пара совместно со вторым краевым условием дает систему  $C_N - \alpha_{N+1} C_{N+1} = \beta_{N+1}$ ,  $C_N - C_{N+1} = 0$ , из которой определяется, например,  $C_N = \beta_{N+1} / (1 - \alpha_{N+1})$ . Тогда для расчета  $C_i$  имеем рекуррентные формулы («обратной прогонки» от  $N$  к 1):

$$C_i = \alpha_{i+1} C_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 1, \quad (4.5)$$

где  $\alpha_{i+1}$ ,  $\beta_{i+1}$  уже найдены выше.

Совокупность рекуррентных формул (4.4), (4.5) при соответствующих начальных значениях и определяет алгоритм, называемый методом прогонки.

Рассмотренный комплекс методов может служить основой для проведения на ЭВМ в рамках построенной модели математических экспериментов, результат которых существенно превосходит тот, который можно получить путем эксперимента физического. Трудности же проведения последнего хорошо известны.

### 4.3. НОМОГРАММЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОЦЕССА ЦЕМЕНТАЦИИ ДЛЯ КОМПАКТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

#### 4.3.1. Постановка задачи обработки результатов эксперимента

Для изучения физики процесса цементации может быть полезна достаточно детальная числовая информация о поле концентраций в приповерхностных слоях образцов, выдаваемая программой-датчиком в виде двумерной таблицы значений. Однако на уровне

проектирования технологического процесса такая таблица неудобна, а для использования программы в качестве оперативного датчика выходных характеристик цементации при любом наборе входных параметров не всегда имеются технические возможности. При таких условиях разработка специальных номограмм для использования их проектировщиком технологического процесса приобретает принципиальное значение.

Обычно номограммы строят на основе линейной модели задачи цементации, когда коэффициент диффузии принимается не зависящим от концентрации [83, 50]. В этом случае оказывается возможным, вводя безразмерные параметры, описать процесс в критериальной форме и именно для такой формы описания составить номограммы. Простейшими из них служат зависимости концентрации от времени на заданной глубине либо зависимости ее от глубины в заданный момент времени:  $\theta = \theta(\xi, \tau)$ , где  $\theta$ ,  $\xi$  и  $\tau$  — безразмерные величины [50]. Соответствующие «палетки» позволяют приближенно прогнозировать результат цементации для каждого набора управляющих параметров при двух условиях: 1) линейная модель достаточно точно описывает реальный процесс; 2) в реальных условиях достаточно точно могут быть заданы управляющие параметры (углеродный потенциал внешней среды, начальная концентрация и т. п.). При этом для осуществления прогноза требуется предварительный перевод реальных параметров в безразмерные и (после использования палеток) обратно, который может быть автоматизирован также с помощью номограмм. Отметим, что на последнее обстоятельство в специальной литературе широкого пользования [50] обращается недостаточно внимания.

Особого внимания заслуживает тот случай, когда не все управляющие параметры могут быть заранее заданы, тогда можно ставить, по существу, обратную задачу об определении некоторых из них по результатам косвенных измерений, например по измерениям величин, связанных с результатом процесса цементации. В этом случае решение задачи прогнозирования требует не только определенных пересчетов, но и дополнительных измерений. Простейшая схема этого типа рассмотрена в работе [100], где на основе специальных номограмм предлагается полная автоматизация прогнозирования.

В самом деле, допустим, что процесс цементации в данной печи, где все управляющие параметры неизвестны, зависит от некоторой их комбинации (по принятой, хотя и не точной терминологии — критерия), которая может быть определена на основе замера полной толщины диффузионного слоя в данный момент времени. Тогда, проведя замер, можем определить «параметр печи», а зная его — прогнозировать результат в любой момент времени. Автоматизм такой операции связан с тем, что указанный замер можно произвести только один раз. Недостатки методики, используемой в работах [83, 50, 100], состоят в следующем.

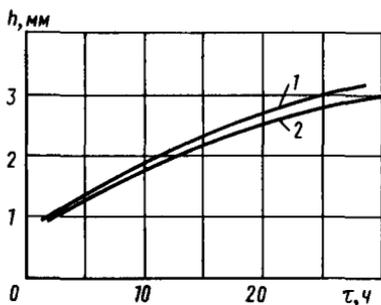


Рис. 4.1. Сравнение результатов расчета для различных моделей диффузии ( $t = 930^\circ\text{C}$ ,  $C_0 = 0,15\%$ ,  $C_{\text{окр}} = 1\%$ ):

1 — нелинейная модель,  $D(C) = (0,04 + 0,080) \exp(-31\,350/1,987t_R)$  [83]; 2 — линейная модель,  $D(C) = 0,49 \exp x$   $x (-36\,000/1,987t_R)$  [50]

1. Она неприменима к нелинейной задаче диффузии. На рис. 4.1 (кривые 1, 2) представлены зависимости толщины цементуемого слоя от времени насыщения, полученные для нелинейной и линейной моделей.

Видно, что погрешность в определении времени цементации, при котором достигается необходимая толщина насыщенного углеродом слоя, может достигать 5 ч, что составляет 20 % потерянного времени. При точном выполнении условий насыщения фактическое время совпадает с рассчитанным для нелинейной модели [61].

2. Описанная методика неприменима при быстром или непрерывном изменении режима работы печи, которое может быть полезно в целях сокращения длительности технологического процесса.

3. Номограммы, приведенные в работе [100], позволяют прогнозировать лишь общую глубину цементации, т. е. расстояние от поверхности насыщения до сердцевины, не затронутой воздействием диффузии. Между тем часто представляет интерес часть этой толщины — расстояние от поверхности от участка с заданным предельным значением базового параметра.

В работах [61, 53] на основе обработки результатов математического эксперимента разработаны номограммы процесса цементации, свободные от указанных недостатков, т. е. относящиеся к нелинейному процессу диффузии и доставляющие более полную информацию об условиях и результатах процесса. Все они относятся к традиционному способу управления ТП с помощью задания постоянных значений температуры печи  $t$  и углеродного потенциала среды  $C_{\text{окр}}$ . Эти две величины, выраженные соответственно в  $^\circ\text{C}$  и %, служат, таким образом, управляющими параметрами процесса.

К числу управляющих параметров отнесем также  $\hat{C}_0$  — начальное содержание углерода в металле, выраженное в %: для углеродистой стали  $\hat{C}_0$  характеризует ее марку.

Совокупность управляющих параметров будем также обозначать символом  $p$ :  $p = \{\hat{C}_0, t, C_{\text{окр}}\}$ .

В качестве выходных характеристик процесса цементации, совокупность которых обозначим символом  $q$ , отнесем следующие общепринятые [50] характеристики диффузионного слоя;  $\hat{t}$  — время цементации, ч;  $C_{\text{гр}}$  — нижний уровень насыщения эффек-

тивного слоя углеродом, % (в таком слое  $C \geq C_{гр}$ );  $h_{гр}$  — толщина эффективного слоя, соответствующая заданному параметру  $C_{гр}$ , мм;  $h_{общ}$  — общая толщина диффузионного слоя, т. е. расстояние от поверхности до сердцевины, практически не подверженной диффузии углерода, мм (обычно она соответствует значению  $C_{гр} = \hat{C}_0 + 0,05\%$ );  $C_{пов}$  — содержание углерода на поверхности металла, % (этот параметр служит для оценки верхнего уровня насыщения диффузионного слоя углеродом). Заметим, что при заданной модели массообмена (условие третьего рода на поверхности)  $C_{пов}$  не равно углеродному потенциалу атмосферы  $C_{окр}$ .

Таким образом, характеристика результата цементации дается набором значений

$$q = \{\hat{t}, C_{гр}, h_{гр}, h_{общ}, C_{пов}\}.$$

Понятно, что выбранные выходные параметры не являются независимыми, поскольку они связаны неявным образом полем концентраций  $C(x, \tau)$ ; например, в данный момент  $\hat{t}$  окончания процесса остальные четыре параметра связаны диффузионной кривой — распределением концентрации по глубине приповерхностного слоя, которая однозначно определяется входными параметрами  $p$ .

Однако разным набором  $p$  и соответственно разным распределением концентрации могут соответствовать совпадающие или близкие наборы интегральных выходных параметров  $q$ . В этом, в частности, заложена возможность экономии топливно-энергетических ресурсов, расходуемых в технологическом процессе.

Номограммы цементации в той или иной форме выражают зависимость  $q = F(p)$ , на основе которой можно решать задачу оптимального в указанном смысле проектирования процесса.

Отметим, что привидимые номограммы представляются непосредственно в размерных единицах, что может быть удобным для использования, тогда как критериальная форма описания, подобная описанной в работе [50], при нелинейном процессе невозможна.

#### 4.3.2. Номограммы первого уровня

Эти номограммы представляют собой графики семейства зависимостей  $h_{гр} = h_{гр}(\tau)$ . Каждое семейство относится к заданному значению  $C_{гр}$ , а также заданному  $\hat{C}_0$ . Различные кривые каждого семейства соответствуют различным значениям  $C_{окр}$  либо различным значениям  $\hat{t}$ . На рис. 4.2 представлен пример такой номограммы для  $\hat{C}_0 = 0,15\%$ .

Для их построения, которое допускает и автоматизацию, для каждого фиксированного набора  $p$  и каждого  $\tau = \tau_l$  на некоторой выбранной сетке значений  $\{\tau_l\}$  с кривой  $C = C(x, \tau_l)$  «снимается» значение  $x = h_{гр}$ , соответствующее заданному  $C = C_{гр}$  (рис. 4.3);  $x = h_{гр}$  получается в ходе такого съема как одно из значений  $C_{гр}$ .

Далее проводится группировка полученных опорных точек по различным «листам» номограммы с последующим соединением с помощью кривых тех точек, которые относятся к одним и тем же парам ( $t, C_{\text{опр}}$ ).

В работах [61, 53] такая обработка результатов расчета поля концентрации проведена при  $t$ , равном 850, 930, 1050 °С для сталей с начальным содержанием углерода  $\hat{C}_0 = \{0,15; 0,2; 0,25; 0,30\} \%$  и для углеродного потенциала  $C_{\text{опр}} = \{1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5\} \%$ .

Такие номограммы наглядно выражают динамику технологического процесса при указанном типе управления. Из рис. 4.2 видно, что для любого фиксированного момента времени  $h_{\text{гр}}$  увеличивается с повышением  $t$  и возрастанием  $C_{\text{опр}}$ . Следовательно, заданное значение  $h_{\text{гр}}$  можно получить при различных режимах управления. Номограммы позволяют сделать соответствующие количественные оценки параметров процесса цементации.

Так, например, если для стали с  $\hat{C}_0 = 0,15\%$  нужно получить эффективный слой толщиной 1,5 мм с содержанием углерода

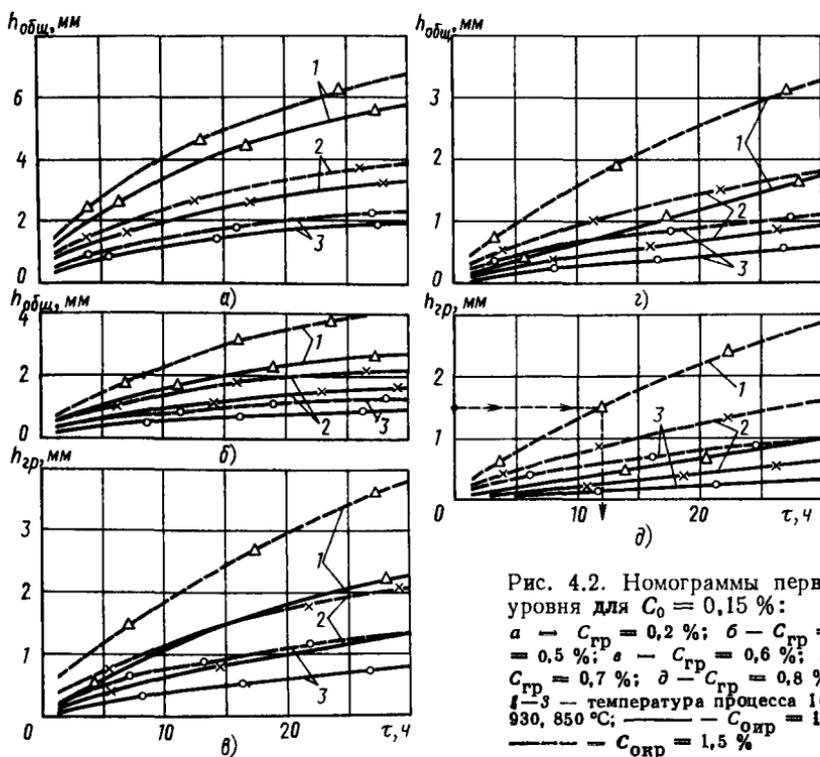
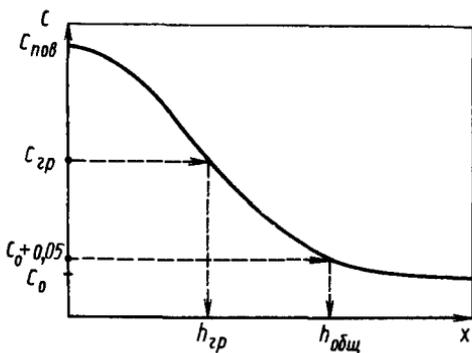


Рис. 4.2. Номограммы первого уровня для  $C_0 = 0,15\%$ :  
 а —  $C_{\text{гр}} = 0,2\%$ ; б —  $C_{\text{гр}} = 0,5\%$ ; в —  $C_{\text{гр}} = 0,6\%$ ; г —  $C_{\text{гр}} = 0,7\%$ ; д —  $C_{\text{гр}} = 0,8\%$ ;  
 1—3 — температура процесса 1050, 930, 850 °С; — — — —  $C_{\text{опр}} = 1\%$ ;  
 — — — —  $C_{\text{опр}} = 1,5\%$

Рис. 4.3. Схема обработки результатов расчета поля концентраций

$C \geq 0,8 \%$ , то, как показывают штриховые линии на одной из номограмм на рис. 4.2, нужно задать температуру печи  $1050^\circ\text{C}$ , обеспечить углеродный потенциал газовой среды на уровне  $1,5 \%$  и продолжать процесс цементации  $12 \text{ ч}$ . С другой стороны, эффективный слой толщиной  $1 \text{ мм}$  с той же граничной концентрацией можно получить при различных управлениях; из них указанное выше управление ( $t = 1050^\circ\text{C}$ ,  $C_{\text{опр}} = 1,5 \%$ ) приводит к экономии времени ( $\varphi = 6 \text{ ч}$ ), а следовательно, и ресурсов.



На основе номограмм первого уровня можно сделать и некоторые общие выводы относительно динамики процесса.

1. Концентрация углерода на поверхности  $C_{\text{пов}}$  практически не зависит от начального количества углерода (марки стали), а при  $\varphi \geq 15 \div 20 \text{ ч}$  и от температуры, а зависит только от углеродного потенциала среды  $C_{\text{опр}}$ . Эта закономерность отмечается и в работе [83] для линейной модели.

2. Толщина общего диффузионного слоя  $h_{\text{общ}}$  ( $\tau$ ) в рассматриваемых диапазонах температуры и  $C_{\text{опр}}$  слабо зависит от марки стали  $C_0$ .

Номограммы обнаруживают и более тонкий эффект и позволяют оценить его количественно.

3. Для любого фиксированного момента времени цементации глубина мерного слоя, отвечающего заданной граничной концентрации, убывает с возрастанием  $t$ , но растет с возрастанием  $C_{\text{опр}}$ . Иначе говоря,  $C_{\text{опр}}$  и  $t$  являются «конкурирующими» параметрами управления процессом.

Все это относится, разумеется, к рассматриваемому в настоящем пункте типу управления, и для него становится очевидной альтернатива проектного решения: или увеличить  $t$ , уменьшив при этом  $C_{\text{опр}}$ , или же увеличить  $C_{\text{опр}}$ , но при этом уменьшить  $t$ , сохраняя эффективную толщину диффузионного слоя  $h_{\text{гр}}$  постоянной.

### 4.3.3. Номограммы второго уровня

Эти номограммы дают более компактное представление о зависимости  $q = F(p)$ . В этом случае для каждой из них фиксирована лишь пара управляющих параметров;  $C_0$  и  $t$ . Соответственно они отражают в графической форме зависимость каждого из выходных

параметров процесса от единственного управляющего параметра  $C_{\text{опр}}$  — углеродного потенциала внешней среды.

Номограммы второго уровня получаются с помощью следующей обработки данных математического эксперимента.

Сначала по расчетным данным для каждого из набора значений  $C_{\text{гр}}$  устанавливаются зависимости  $h_{\text{гр}}(\tau)$ ,  $C_{\text{пов}}(\tau)$ ,  $h_{\text{общ}}(\tau)$ , соответствующие величины легко снимаются с диффузионных кривых, отвечающих различным  $\tau$ . Оказывается, однако, что в полулогарифмической шкале указанные зависимости достаточно точно (с погрешностью, не превосходящей 2 %) выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \lg h_{\text{общ}} &= \alpha + \beta C_{\text{пов}}; & (\lg h_{\text{гр}} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} C_{\text{пов}}); \\ C_{\text{пов}} &= a + b \lg \varpi; & \lg h_{\text{общ}} &= \beta + \hat{q} \lg h_{\text{гр}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Коэффициенты в этих формулах можно определить по методу наименьших квадратов [35].

Так, например, значения  $a$  и  $b$  определяют из условия

$$\min f(a, b) = \min \sum_{i=1}^N \{C_{\text{пов}}^i - (a + b \lg \varpi_i)\}^2,$$

где  $\{\varpi_i, C_{\text{пов}}^i\}$  — набор значений, извлеченных из диффузионных кривых. Этому требованию соответствует пара уравнений  $df/da = 0$ ,  $df/db = 0$ , которые, как можно убедиться, принимают вид

$$\begin{aligned} aN + b \sum_{i=1}^N \lg \varpi_i &= \sum_{i=1}^N C_{\text{пов}}^i, \\ a \sum_{i=1}^N \lg \varpi_i + b \sum_{i=1}^N \lg^2 \varpi_i &= \sum_{i=1}^N C_{\text{пов}}^i \lg \varpi_i \end{aligned}$$

и решаются уже стандартным способом относительно искомых коэффициентов.

Очевидно, коэффициенты в (4.6) вычисляются лишь однажды, после чего появляется возможность преобразовать функции (4.6) к трем другим;  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(C_{\text{пов}})$ ;  $\varpi = \varpi(C_{\text{пов}})$ ;  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(h_{\text{гр}})$ . Последние зависимости изображаются графически.

То, что эти графики оказываются отрезками прямых, делает номограммы удобными для использования при соответствующем расположении графиков.

Каждая из номограмм (рис. 4.4, 4.5) содержит несколько связанных между собой «листов». На первых из них (рис. 4.4, а; 4.5, а) изображено два семейства кривых:  $\varpi = \varpi(C_{\text{пов}})$  и  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(C_{\text{пов}})$ . Различные кривые каждого из семейств соответствуют различным значениям  $C_{\text{опр}}$ . На остальных листах (рис. 4.4, б; 4.5, б) представлены зависимости  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(h_{\text{гр}})$ . Семейства этих кривых располагаются группами, каждая из которых относится к одному из значений  $C_{\text{гр}}$ . Различные кривые

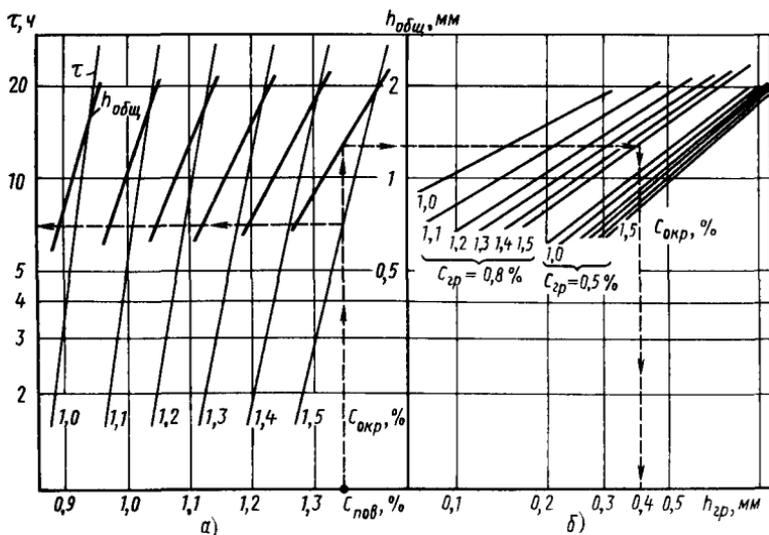


Рис. 4.4. Номограммы второго уровня для  $C_0 = 0,15\%$ ,  $t = 850^\circ\text{C}$

каждой группы соответствуют, как и на первом листе, различным значениям  $C_{\text{окр}}$ . Отметим, что число дополнительных к первому листов зависит исключительно от числа заданных значений  $C_{\text{окр}}$  и эти листы естественно располагать симметрично относительно первого.

Как видно из рис. 4.4, а и 4.5, а, различным значениям  $C_{\text{окр}}$  соответствуют различные пары зависимостей  $h_{\text{общ}}$  и  $t$  от  $C_{\text{пов}}$ . Это позволяет, например, по некоторому заданному значению  $C_{\text{пов}}$  определить для известных параметров ( $C_{\text{окр}}$ ,  $t$ ,  $\bar{C}_0$ ) печи и металла необходимое время цементации  $\tau$  и значение  $h_{\text{общ}}$ . Для этого достаточно «спроектировать» точку оси  $C_{\text{пов}}$  на каждую из вертикальных осей, «отразив» ее в соответствующем графике. На рис. 4.4, а такая операция для  $C_{\text{окр}} = 1,5\%$  изображена штриховой линией.

Значение пары  $\{h_{\text{гр}}, C_{\text{гр}}\}$  для тех же значений управляющих параметров можно найти по дополнительному листу, проектируя найденное выше  $h_{\text{общ}}$  на ось  $h_{\text{гр}}$  с помощью отражения в соответствующей кривой; при этом выбор группы, содержащей кривую, отвечает значению  $C_{\text{гр}}$ , а указанная проекция — значению  $h_{\text{гр}}$  (см. штриховую линию на рис. 4.4, б).

Аналогично с помощью номограмм второго уровня может быть решена задача прогнозирования, когда отправным является любой другой параметр, характеризующий результат процесса.

Таким образом, представленные номограммы позволяют по заданной совокупности параметров печи и материала ( $C_{\text{окр}}$ ,  $t$ ,  $\bar{C}_0$ ) и одному из выходных определить совокупность всех прочих выходных параметров.

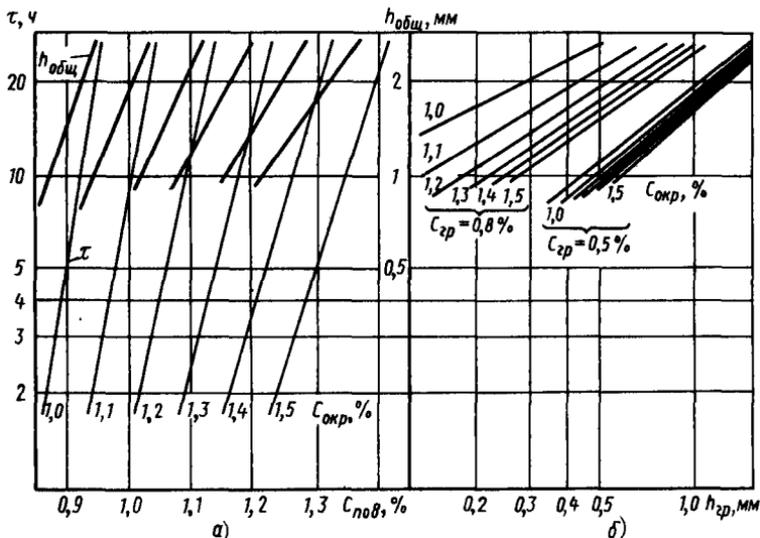


Рис. 4.5. Номограммы второго уровня для  $C_0 = 0,25\%$ ,  $t = 930^\circ\text{C}$

Следует отметить, что на рис. 4.4 и 4.5 представлены приближенные зависимости. Однако относительная погрешность при таком приближении не превышает 10 % во всем диапазоне изменения управляющих параметров, а при  $\varphi \geq 5$  ч она не превышает 3 % для  $h_{\text{общ}}$ , 2 % для  $h_{\text{гр}}$  и 0,3 % для  $C_{\text{пов}}$ .

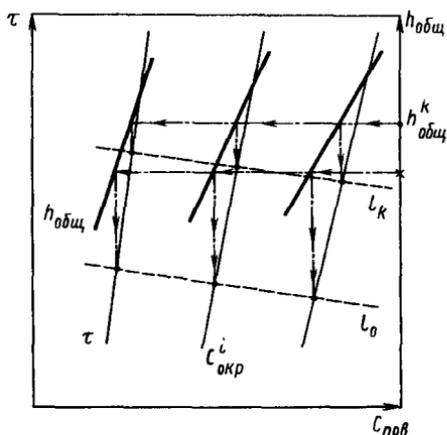
#### 4.3.4. Номограммы третьего уровня

Если отказаться, как это сделано в работе [100], от детальной характеристики результатов цементации, ограничившись лишь параметрами  $\{h_{\text{общ}}, \varphi, C_{\text{пов}}\}$ , связанными с общей границей насыщенного слоя детали, то оказывается возможным еще более компактное представление зависимости  $q = q(p)$ .

Соответствующие номограммы, названные в работах [53, 61] номограммами третьего уровня, получаются дополнительной обработкой предшествующих.

Выберем на оси  $h_{\text{общ}}$  предшествующей номограммы ряд равноотстоящих точек — значений  $h_{\text{общ}}^k$  в нужном нам диапазоне. Проектируем каждую из них на каждую из кривых  $\varphi = \varphi(C_{\text{пов}})$  путем «отражения» в соответствующих тому же значению  $C_{\text{пов}}$  кривых  $h_{\text{общ}}(C_{\text{пов}})$  (рис. 4.6). В результате каждому заданному значению  $h_{\text{общ}}^k$  ставится в соответствие набор точек на кривых  $\varphi = \varphi(C_{\text{пов}})$ . Оказывается, что при любом  $h_{\text{общ}}^k$  эти точки располагаются на одной прямой  $l_k$ . Поскольку прямые  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(C_{\text{пов}})$  практически параллельны, как и прямые  $\varphi = \varphi(C_{\text{пов}})$ , то тем же свойством обладают прямые  $l_k$ . Поэтому можно провести лишь

Рис. 4.6. Схема построения номограм третьего уровня



одну из  $l_k$  (например  $l_0$ ), заменив другие сеткой точек на одной из прямых  $\varphi = \varphi(C_{пов})$ , отвечающих пересечению с ней других  $l_k$ . С другой стороны, отказ от детализации описания прогнозируемой диффузионной кривой позволяет объединить на одном листе новой номограммы зависимости, отвечающие различным значениям  $\hat{C}_0$  и  $t$ , если число возможных значений этих управляющих параметров не слишком велико.

Таким образом, приходим к номографическому описанию связки  $q = F(p)$ , представленному на рис. 4.7. Здесь каждый «пучок прямых» соответствует своему значению  $C_{окр}$ . Различные «лучи» пучка — зависимости  $\varphi = \varphi(C_{пов})$  — отвечают либо различным значениям  $t$ , либо  $\hat{C}_0$ ; в разных пучках лучи, соответствующие одному и тому же управляющему параметру, одина-

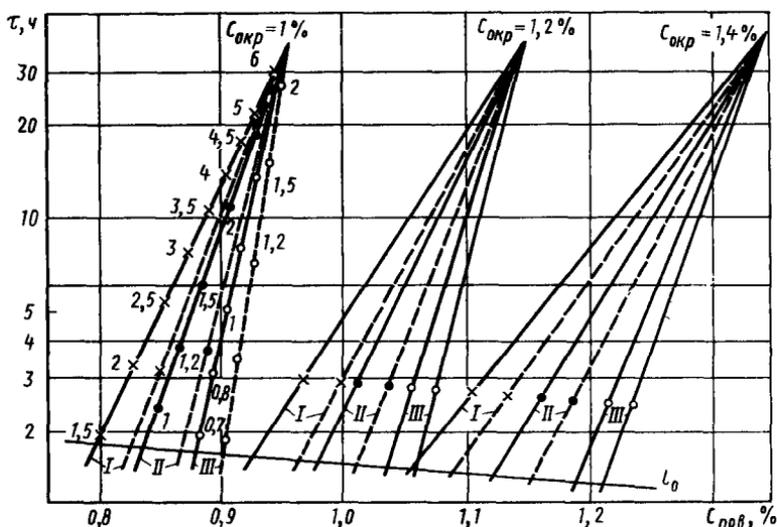


Рис. 4.7. Номограммы третьего уровня для  $C_0 = 0,15\%$  (—) и  $C_0 = 0,30\%$  (---). Цифры у прямых ( $C_0 = 0,15\%$ ,  $C_{окр} = 1\%$ ) соответствуют значениям  $h_{общ}$ , мм:

I—III — температура насыщения 1050, 930 и 850 °C

ково маркируются. Секущая  $l_0$  соответствует одному из заданных значений  $h_{\text{общ}}$  и определяет направление  $l_k$  для любого  $h_{\text{общ}}^k$ .

С помощью описанной номограммы третьего уровня можно при проектировании процесса достаточно просто сопоставить тройке управляющих параметров  $p = \{t, \hat{C}_{\text{окр}}, \hat{C}_0\}$  тройку параметров, характеризующих в общих чертах результат цементации  $q = \{h_{\text{общ}}, C_{\text{пов}}, \tau\}$ .

В пределах этой информации номограммы позволяют решать задачу, в известном смысле, оптимального проектирования. Для того, например, чтобы при заданном наборе  $p$  определить длительность технологического процесса и глубину цементации, при которых цементируемый слой характеризуется требуемым значением  $C_{\text{пов}}$ , нужно провести следующие операции с номограммой: 1) выбрать из того или иного пучка луч, соответствующий данной тройке управляющих параметров  $p$ ; 2) через точку оси абсцисс, соответствующую заданному значению  $C_{\text{пов}}$ , провести отрезок вертикали до пересечения (точка  $M_1$ ) с выбранным лучом; 3) через точку  $M_1$  провести прямую, параллельную  $l_0$ , до пересечения в некоторой точке  $M_2$  с крайним, градуированным по значениям  $h_{\text{общ}}$  лучом; положение точки  $M_2$  дает искомое значение  $h_{\text{общ}}$ , возможно после интерполяции сеточных значений; 4) для получения искомого  $\tau$  остается провести через точку  $M_1$  горизонталь до пересечения с осью ординат.

Можно решать и другие задачи управления технологическим процессом на уровне проектирования.

#### 4.4. ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ

##### 4.4.1. Различные модели управления процессом и целевые постановки задачи управления

В предшествующем пункте предполагалось, что управление осуществляется с помощью изменения уровня постоянной во времени температуры  $t$  печи и уровня постоянного углеродного потенциала газовой среды.

В работах [36, 50] обращено внимание на то, что управление углеродным потенциалом внешней среды во времени может ускорить процесс цементации и при этом дать возможность точнее воспроизвести желаемый профиль концентрации в цементируемом слое. Ввиду математического подобия процессов диффузии и теплопроводности этот эффект аналогичен тому, что имеет место для поверхностного нагрева деталей [67]. Для линейного процесса цементации в работах [36, 50] рассмотрены простейшие модели управления, характеризующиеся скачкообразным уменьшением углеродного потенциала в некоторые моменты времени. В част-

ности, в работе [50] рассмотрена двухступенчатая модель. В этом случае первоначально заданный углеродный потенциал атмосферы  $C_{\text{окр}}^{\text{max}}$  в некоторый момент времени  $\tau_{\text{п}}$  скачком меняется до значения  $C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . Соответственно управляющая функция  $C_{\text{окр}} = f(\tau)$  в граничном условии задачи (4.1) определена в этом случае с помощью трех параметров:  $C_{\text{окр}}^{\text{max}}$ ,  $\tau_{\text{п}}$ ,  $C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . На первой ступени процесса, когда  $C_{\text{окр}}$  поддерживается максимальным, достигается высокая скорость цементации; на второй ступени при снижении значения  $C_{\text{окр}}$  происходит снижение концентрации углерода приповерхностных слоев до нужной концентрации и перераспределение углерода с его оттоком в глубь металла. Линейная модель процесса позволяет найти аналитическое решение задачи и соответственно аналитические оценки эффекта ускорения процесса. В работе [50] это сделано для предельного случая, когда коэффициент массообмена  $\beta$  настолько велик, что можно воспользоваться краевым условием первого рода  $C|_{r=R} = f(\tau)$ .

Аналитическое представление решения не избавляет, однако, от необходимости численных расчетов, хотя и по формулам, явно описывающим процесс. В этих расчетах в качестве управляющего параметра принято отношение продолжительности времени цементации к продолжительности первой стадии процесса (до понижения углеродного потенциала). Целью расчетов является получение профилей цементации в конце процесса в зависимости от значений этого параметра [50].

Заметим теперь, что величины  $\bar{C}_0$  и  $t$  также остаются управляющими параметрами, а при высоких температурах ( $\sim 1000^\circ\text{C}$ ) диффузионный процесс оказывается нелинейным, так что полученные в работах [36, 50] оценки требуют уточнения. Такое уточнение уже не может быть проведено на основе аналитических выкладок, а требует расчетов на ЭВМ. При этом можно рассматривать общий случай массообмена, используя условие третьего рода на границе.

С другой стороны, в производственных условиях «комбинированный» процесс управления протекает не в два, а в три этапа, включая промежуточный этап более или менее плавного перехода от максимального к минимальному значению углеродного потенциала газовой среды. При цементации углеродистых сталей на первом этапе поддерживается углеродный потенциал, близкий к значению предела растворимости углерода в аустените, на втором этапе потенциал снижается до (0,7—0,8 %)  $C_{\text{окр}}^{\text{max}}$ , на третьем этапе поддерживается на этом уровне до получения требуемой толщины цементованного слоя. Простейшая модель такого управления, удобная и для реализации на производстве, связана с линейным падением углеродного потенциала на промежуточном этапе. В этом случае управляющая функция  $f(\tau)$ , представленная на рис. 4.8, характеризуется следующими параметрами:  $\{C_{\text{окр}}^{\text{max}}$ ,

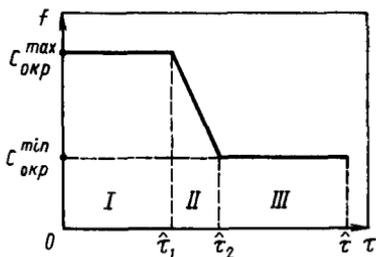


Рис. 4.8. Изменение управляющего углеродного потенциала в процессе трехстадийной цементации

$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . По-прежнему к числу управляющих параметров при заданной марке стали, характеризующейся начальным содержанием углерода  $\hat{C}_0$ , относится температура печи  $t$ . Эта естественная

для условий производства модель управления предоставляет, как показано в работе [53] (см. также 4.4.2), и большие возможности для повышения эффективности управления процессом по сравнению с двухступенчатой моделью.

Такая модель допускает развитие в двух направлениях.

Во-первых, сохраняя ту или другую из рассмотренных выше моделей управления углеродным потенциалом, можно считать температуру печи также функцией времени:  $t = t(\tau)$ . Для такого управления, хотя бы и в рамках простых реализаций, также имеются возможности на производстве. К числу простейших реализаций  $t(\tau)$  относится «двухступенчатая» функция, когда температура печи  $t_1$  скачком уменьшается в некоторый момент времени  $\hat{\tau}_2$  до меньшей величины  $t_2$ . Ближе к производственным условиям функция, непрерывно меняющаяся во времени, подобная изображенной на рис. 4.8, характеризуемая четырьмя параметрами.

Во-вторых, сохраняя постоянной температуру печи как параметр, можно рассмотреть достаточно произвольную зависимость углеродного потенциала среды от времени  $C_{\text{окр}} = f(\tau)$ , аппроксимируемую при реализации некоторой более простой, но более общей, чем приведенная выше, функцией.

Выбрав ту или другую модель, можно формулировать обратную задачу управления, оптимального управления процессом цементации. В постановке такой задачи требуется определить управляющие параметры таким образом, чтобы было обеспечено получение максимально близкой аппроксимации к тем или иным характеристикам желаемого распределения концентрации по глубине. Другой постановкой является требование достижения указанного эффекта за кратчайшее время. Обе эти постановки аналогичны тем, которые возникают в задаче о равномерном нагреве деталей в соответствующих секциях газовых печей (см. гл. 2). Отличие состоит в том, однако, что на выходе процесса требуется приближение концентрации не к постоянному уровню, а к более сложному профилю.

#### 4.4.2. Предварительная оценка эффекта трехстадийного управления с помощью углеродного потенциала среды

Такая оценка получается с помощью прямого математического моделирования процесса цементации в рамках решения задачи (4.1) в зависимости от управляющих параметров и путем номографического описания результатов процесса.

При трехстадийном управлении с помощью  $C_{\text{окр}} = C_{\text{окр}}(\tau)$  на первой стадии цементации ( $0 \leq \tau \leq \hat{\tau}_1$ ) при высоком постоянном углеродном потенциале  $C_{\text{окр}}$  происходит ускоренное насыщение прилегающего к границе слоя; третья стадия ( $\tau \geq \hat{\tau}_2$ ) связана с образованием диффузионного слоя большей, чем на первой стадии, толщины при меньшем, но также постоянном потенциале  $C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . Вторая стадия ( $\hat{\tau}_1 < \tau < \hat{\tau}_2$ ) — промежуточная. Эффект такого управления оценивался в работе [61] при  $C_{\text{окр}}^{\text{min}} = 1\%$  и  $C_{\text{окр}}^{\text{max}} = 1,5\%$ , а также  $\hat{\tau}_1 = 5$  ч; в качестве переменной была выбрана длительность переходной стадии  $\Delta \hat{\tau} = \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1$ .

К числу управляющих параметров  $p$ , наряду с  $\Delta \hat{\tau}$ , относились также начальное содержание углерода в диффузионном слое  $\hat{C}_0$ , соответствующее его содержанию в стали, и температура цементации  $t$ . Результаты цементации характеризуются следующими «выходными» параметрами:  $\hat{\tau}$  — продолжительность цементации, ч;  $C_{\text{гр}}$  — концентрация углерода на нижней границе эффективного слоя, которую требуется получить, %;  $h_{\text{гр}}$  — толщина эффективного слоя, мм.

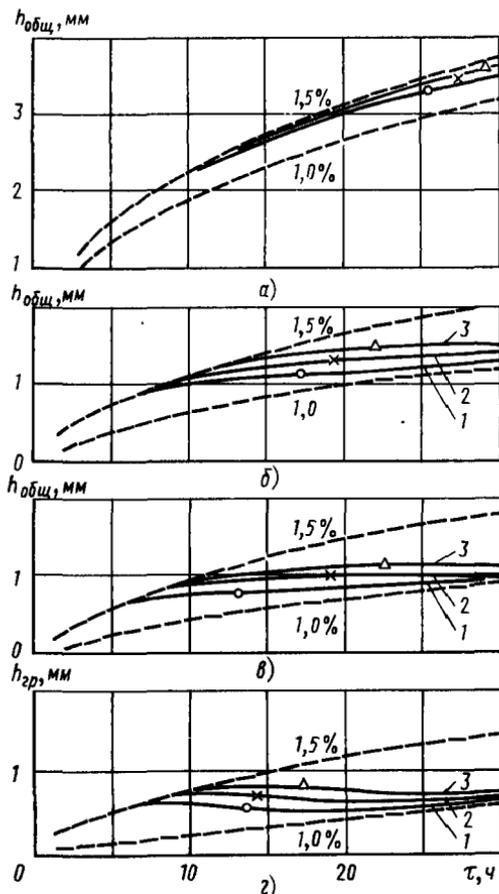
На рис. 4.9 представлен фрагмент номограммы  $h_{\text{гр}} = h_{\text{гр}}(\tau, p)$  в сравнении с результатами цементации при постоянном углеродном потенциале.

Анализ полученных номограмм показывает, что за счет изменения соотношения длительности трех стадий цементации можно получать диффузионные слои с различным распределением углерода по его толщине, т. е. появляется возможность регулировать эффективную толщину слоя  $h_{\text{гр}}$ , причем большая толщина эффективного слоя достигается при более медленном снижении углеродного потенциала на второй стадии процесса. На третьей стадии  $h_{\text{гр}}$  практически не изменяется, особенно при значениях  $C_{\text{гр}} \geq 0,6\%$ , и происходит лишь увеличение  $h_{\text{общ}}$ .

Общая толщина диффузионного слоя  $h_{\text{общ}}$  рассматриваемым способом практически не регулируется. Зависимость  $h_{\text{общ}} = h_{\text{общ}}(\tau)$  также показана на рис. 4.9.

Сопоставление кривых, соответствующих на рис. 4.9 различным углеродным потенциалам при фиксированных значениях прочих управляющих параметров, приводит к выводу, что если нас интересует определенная, заранее заданная величина  $h_{\text{гр}}$ , то время цементации в рассматриваемом эксперименте можно сократить примерно на 30 % по сравнению с тем, которое требуется при поддержании углеродного потенциала на уровне  $C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . Этот

Рис. 4.9. Фрагмент номограмм  $h_{гр}(\tau, \rho)$  для трехстадийной цементации (—) при  $\Delta t$ , равном 5 с (1), 10 с (2), 15 с (3), в сравнении с номограммой при постоянном потенциале (---) для  $t = 930^\circ\text{C}$ ,  $C_0 = 0,15\%$ . Цифры у кривых —  $C_{окр}$ , %: а —  $C_{гр} = 0,2\%$ ; б —  $C_{гр} = 0,6\%$ ; в —  $C_{гр} = 0,7\%$ ; г —  $C_{гр} = 0,8\%$



результат качественно коррелирует с прогнозом, сделанным в работе [36] для трехступенчатой модели по сравнению с двухступенчатой.

Показано, что при двухступенчатой цементации длительностью 18 ч, эффективный слой с  $C_{гр} = 0,6\%$  имеет толщину 0,86 мм. При трехстадийном процессе цементации такой же длительности образуется эффективный слой с  $C_{гр} = 0,6\%$  толщиной 1,1 мм при  $t = 5$  ч.

Полученные оценки свидетельствуют о перспективности управления с помощью варьирования управляющих параметров во времени и целесообразности постановки соответствующих обратных задач.

С другой стороны номограммы первого уровня, аналогичные представленным на рис. 4.9, характеризующие результаты нелинейной цементации в зависимости от управляющих параметров,

так же, как и номограммы предшествующего параграфа, могут служить целям проектирования технологического процесса. При таком использовании они дополняют номограммы первого уровня, приведенные в п. 4.3.2.

#### 4.4.3. Математическая постановка задачи трехстадийного управления цементацией в автоматическом режиме

В отличие от п. 4.3 здесь рассматриваются постановки, предназначенные для управления процессом цементации в динамическом режиме, т. е. в реальном времени. Соответствующие программы могут служить основными элементами математического обеспечения управляющих инструментально-вычислительных комплексов (ИВК). Технологическая часть математического обеспечения должна быть, разумеется, дополнена программами, реализующими способ создания управляющего углеродного потенциала, например, путем изменения химического состава газовой среды<sup>1</sup>. Обратная задача о выборе химического состава, обеспечивающего заданную в каждый момент времени величину  $C_{\text{окр}}$ , может быть решена на основе использования вводимых в ЭВМ номограмм, подобных приведенным в работе [50], и более подробно ее здесь не рассматриваем. Обратимся к вариационным постановкам задачи автоматизированного управления цементацией.

Для рассматриваемой модели управления и для заданного материала деталей, характеризуемого начальной концентрацией углерода  $\bar{C}_0$ , можно указать дискретную совокупность  $\hat{p}$  управляющих параметров. К их числу, наряду с величинами, характеризующими потенциал и температуру газовой печи, следует отнести также продолжительность цементации  $\hat{t}$ . Тогда алгоритм прямого моделирования процесса цементации (решения задачи (4.1)) определяет концентрацию в конечный момент времени  $\hat{t}$  на любой глубине  $x$  при каждой заданной совокупности прочих параметров  $S [x, \hat{p}]$ .

В соответствии с традиционным подходом, как и при построении номограмм (см. п. 4.3), будем характеризовать желаемый профиль распределения углерода по глубине небольшим числом ( $s = 2 \div 3$ ) реперных точек. К последним относится точка  $x_0 = 0$  с заданной концентрацией  $C^{(0)} = C_{\text{пов}}$ ; точка  $x_1 = h_{\text{гр}}$  с заданным значением  $C^{(1)} = C_{\text{гр}}$ , соответствующая «эффективной» глубине цементации; наконец, возможно точка  $x_2 = h_{\text{общ}}$ , соответствующая общей толщине диффузионного слоя, для которой  $C^{(2)} = \bar{C}_0 + 0,05\%$ . Впрочем число  $s$  реперных точек может быть и увеличено в разумных пределах.

<sup>1</sup> Задача легко решается изменением расхода добавки эндогаза к основному наполнителю.

Тогда одна из задач управления состоит в нахождении таких управляющих параметров  $\hat{\rho}^*$ , которым соответствует наименьшее в определенном смысле отклонение диффузионного профиля в реперных точках от заданных значений концентрации. Математически это требование может быть выражено условием

$$\rho^* = \arg \inf_{\rho \in P} \sum_{k=0}^s \{C[x_k, \rho] - C^k\}^2. \quad (4.7)$$

При этом предполагается, что совокупность управляющих параметров принадлежит заранее заданному, не слишком широкому множеству значений  $\hat{\rho} \in P$ . В рассматриваемой модели это означает, прежде всего, что каждый из управляющих параметров может изменяться в заранее заданных пределах, а некоторые — на заданной сетке значений или даже быть фиксированными по техническим условиям. Эти «априорные» ограничения обеспечивают корректность постановки вариационной задачи (4.7), поскольку определенное указанными ограничениями множество параметров является компактным в конечномерном пространстве.

Наряду с этими явными количественными ограничениями, требование  $\rho \in P$  может включать часто и неявные ограничения: условие принадлежности диффузионной кривой  $C[x, \rho]$  определенному классу, например классу монотонно убывающих с глубиной функций либо функций, обладающих этим качеством «в среднем», с некоторым допуском на уровень локального роста.

Задача (4.7) может быть решена автоматически на ЭВМ, и в результате оператору за пультом управления процессом либо управляющему устройству выдаются значения  $\rho^*$ , соответствующие предъявляемым к результирующему профилю цементации требованиям. Для полной автоматизации на этом уровне следует использовать один из известных в работе [19] алгоритмов глобальной минимизации функций на заданном множестве. Весьма общим алгоритмом такого рода может служить метод формального поиска [19], не требующий вычисления градиента минимизируемой функции. Как и все минимизирующие алгоритмы, этот метод является итерационным и, следовательно, требует задания начального приближения. При работе системы в непрерывном режиме, когда одна задача управления решается вслед за другой, в качестве начального приближения может служить решение предшествующей задачи. При запуске системы этот выбор может быть достаточно произвольным.

При решении такой задачи в целях контроля качества приближения можно выдавать и значение минимизируемой функции при  $\rho = \rho^*$ .

Если может быть заранее указан в разумных пределах допуск  $\delta^*$  на отклонение концентраций от требуемых реперных значений, то постановка задачи, решаемой в автоматическом режиме, не-

сколько меняется. Теперь алгоритм минимизации функции прерывается по условию

$$F(\beta) \equiv \sum_{k=0}^s \{C[x_k, \beta] - C^{(k)}\}^2 \leq \delta^2. \quad (4.8)$$

«Разумность» выбора допуска — это условие «состоятельности» постановки задачи  $\inf F(\beta) < \delta^2$  при  $\beta \in P$ . Вопрос о том, соблюдено ли это условие при заданном  $\delta^2$ , решается математическим экспериментом в ходе предварительной отладки управляющей системы.

При постановке задачи учитываем специфику требований, отраженных неравенством  $F \leq \delta^2$ . В силу структуры функции  $F$  это требование не означает, что диффузионная кривая проходит через реперные точки; требуется, чтобы она лишь в среднем приближалась к некоторой мыслимой кривой, проходящей через них. Большого требовать и нельзя, так как в выборе формы кривой мы не свободны: это решение краевой задачи (4.1) при  $\varphi = \hat{\varphi}$ . Соответственно, если число реперных точек велико, искомое приближение может не содержать ни одной из них либо содержать лишь некоторые, удовлетворяя в остальном нашим качественным представлениям о желаемом распределении концентрации. Если число реперных точек мало, например одна-две, то соответствующая найденным параметрам  $\beta$  диффузионная кривая может даже содержать их, но между ними вести себя противоположно нашему желанию, например немонотонным образом, поскольку трехстадийное управление, как мы увидим из приводимых ниже примеров, допускает и такую возможность. Именно в этой связи постановка задачи дополняется более тонкими требованиями ко множеству допустимых значений параметров.

В случае, если некоторые управляющие параметры выбираются из заданного набора значений, может быть целесообразно исключить их из числа варьируемых в рамках минимизирующего алгоритма. В этом случае задача минимизации (4.7) или квазiminимизации (4.8) решается многократно при различных значениях выделенных таким образом параметров. Экономия времени достигается в результате того, что с уменьшением числа автоматически варьируемых параметров скорость минимизирующего алгоритма возрастает.

Наряду с рассмотренными постановками, представляет интерес задача об оптимальном управлении процессом цементации на предмет максимальной экономии времени. В такой постановке параметр  $\hat{\varphi}$  изымается из числа управляющих и становится целевым функционалом, зависящим от оставшихся управляющих параметров. Не меняя обозначения, для последних можно записать  $\hat{\varphi} = \varphi(\beta)$ ,  $\beta \in P_*$ , где множество  $P_*$  включает, наряду с требованиями, характеризующими  $P$ , условие, чтобы выбирались только такие параметры, которые на данном множестве  $P$  обеспе-

чивают близость в пределах допуска профиля концентрации к заданным реперным точкам.

Решение этой задачи естественно искать на сетке значений  $\{\hat{t}_i\}$ . Это значит, что при каждом  $\hat{t}_i$  решается относительно остальных управляющих параметров задача квазиминимизации (4.8). Алгоритм решения последней является составной частью комплекса методов, разрешающих задачу оптимального в указанном смысле управления. Эта основная часть дополняется условием выбора значения  $\hat{t}_i$ : выбирается то наименьшее значение  $\hat{t}_i \in \{\hat{t}_i\}$ , для которого еще выполняется условие  $\beta \in P_i^*$ .

Обратим в заключение внимание на одну деталь, связанную с алгоритмом расчета функции  $F \equiv \sum_{k=0}^s [C[x_k, \beta] - C^{(k)}]^2$ .

Поскольку реперные точки, вообще говоря, не совпадают с узлами сетки  $\{x_i\}$ , используемой при конечно-разностной аппроксимации уравнения (4.1), то для получения  $C[x_k, \beta]$  по найденной аппроксимации  $\{C[x_i, \beta]\}$  диффузионной кривой  $C[x, \beta]$  используется интерполяция, и при достаточно мелком шаге сетки  $\{x_i\}$  — линейная.

#### 4.4.4. Примеры решения задачи трехстадийного управления процессом цементации в автоматическом режиме

В приводимых здесь примерах рассмотрим результаты, связанные с первым вариантом развития модели трехстадийного управления, когда, наряду с углеродным потенциалом, во времени так или иначе изменяется температура печи.

Прежде всего остановимся на простейшем случае регулирования температуры, считая, что в момент времени  $\hat{t}_2$  — момент установления  $C_{\text{окр}}^{\text{min}}$  — температура печи  $t_1$  скачком изменяется до значения  $t_2 < t_1$ . Уменьшение температуры печи и соответственно температуры металла на этой стадии процесса призвано уменьшать диффузионные потоки в приповерхностных слоях и способствовать оттоку углерода в глубь металла за счет ранее образовавшегося значительного градиента на границе «эффективного» слоя. Таким образом уменьшение температуры действует в том же направлении, что и уменьшение углеродного потенциала печи. Будем считать начальную температуру печи  $t_1$  заранее заданной и принимающей одно из значений: 870, 930 °С. Полное время цементации будем задавать на некоторой дискретной сетке значений.

При этих условиях управление характеризуется следующим набором пяти параметров, определяемых в автоматическом режиме по заданным реперным точкам на диффузионной кривой  $\vec{p}^I = \{C_{\text{окр}}^{\text{max}}, \hat{t}_1, \hat{t}_2, C_{\text{окр}}^{\text{min}}, t_2\}$ . Компактное множество, содержащее искомые значения параметров, определим неравенствами:  $1,21\% \geq C_{\text{окр}}^{\text{max}} > C_{\text{окр}}^{\text{min}} \geq 0,8\%$ ;  $850^\circ\text{C} \leq t_2 < t_1$ ;  $\hat{t}_1 + 0,25 \leq \hat{t}_2 < \hat{t}$ . Эти

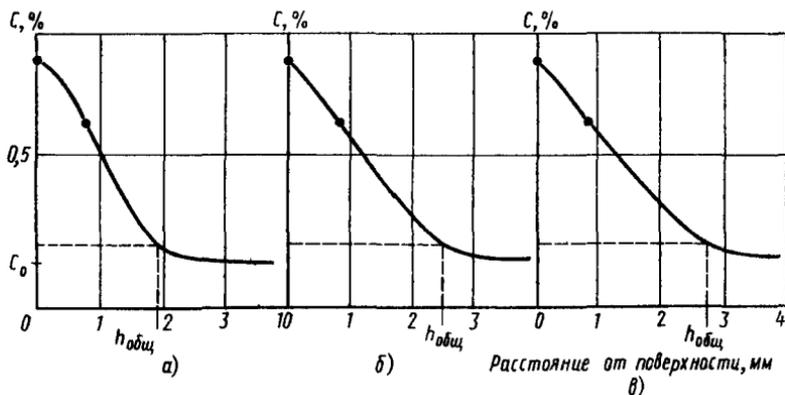


Рис. 4.10. Распределение концентрации углерода при различной продолжительности процесса ( $C_{пов} = 0,8$ ;  $C_{гр} = 0,6$ ;  $h_{гр} = 0,8$ ;  $t_1 = 930^\circ\text{C}$ ):  
 а —  $t = 10$  ч; б —  $t = 20$  ч; в —  $t = 30$  ч

ограничения соответствуют технологическим условиям, существующим на большинстве реальных термических агрегатов для цементации и нитроцементации.

Зададимся вначале парой реперных точек, т. е. набором параметров  $\vec{q} = \{C_{пов}, (C_{гр}, h_{гр})\}$ . На рис. 4.10 представлены оптимальные по наилучшему воспроизведению значений  $\vec{q}$  профили концентраций для различной продолжительности процесса. Эти профили получены одновременно со следующими значениями управляющих параметров:

$$\vec{p}_1^1 = \{1,14\%; 7,67 \text{ ч}; 9,33 \text{ ч}; 0,80\%; 903,12^\circ\text{C}\};$$

$$\vec{p}_2^1 = \{1,13\%; 8,00 \text{ ч}; 9,33 \text{ ч}; 0,83\%; 881,34^\circ\text{C}\};$$

$$\vec{p}_3^1 = \{1,14\%; 1,00 \text{ ч}; 10,00 \text{ ч}; 0,82\%; 865,41^\circ\text{C}\}.$$

Можно увидеть, что в зависимости от продолжительности процесса при тех же самых опорных значениях  $\vec{q}$  возможны два характерных типа распределения углерода в диффузионном слое. Одно из распределений характеризуется достаточно крутым линейным спадом концентрации с глубиной; другое — образованием приповерхностного слоя с более медленно убывающей концентрацией.

Регулируя время цементации и выбирая соответствующие оптимальные параметры, можно обеспечить то качество распределения углерода в приповерхностном слое, которое соответствует принятому при проектировании решению.

Отметим что в рассматриваемом случае общая глубина цементации не управляется и приобретает ту величину, которую ей предписывают при выбранных параметрах  $\vec{p}$  законы диффузии.

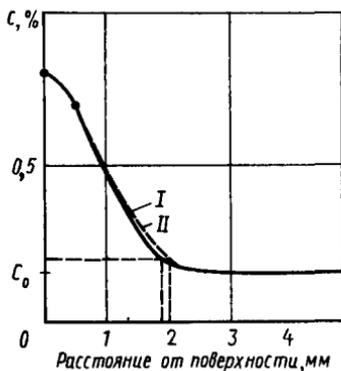


Рис. 4.11. Распределение концентрации углерода при двух управлениях ( $C_{\text{пов}} = 0,8$ ;  $C_{\text{гр}} = 0,7$ ;  $h_{\text{гр}} = 0,5$ ):  
 I —  $\vec{p}^1 = \{1,33\%; 6,88 \text{ ч}; 8,50 \text{ ч}; 0,81\%; 850,0 \text{ }^\circ\text{C}\}$  при  $t_1 = 930 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\hat{t} = 10 \text{ ч}$ ; II —  $\vec{p}^2 = \{1,12\%; 14,67 \text{ ч}; 16,00 \text{ ч}; 0,81\%; 858,5 \text{ }^\circ\text{C}\}$  при  $t_1 = 870 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\hat{t} = 20 \text{ ч}$

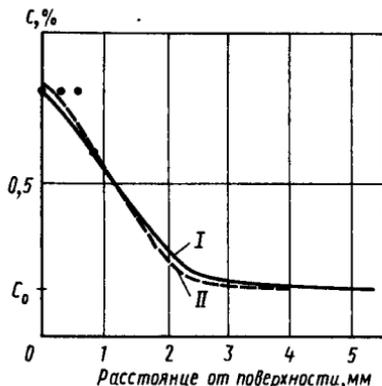


Рис. 4.12. Распределение концентрации углерода при различных наборах реперных точек:  
 I —  $C_{\text{пов}} = 0,8$ ;  $C_{\text{гр}} = 0,6$ ;  $h_{\text{гр}} = 0,8$ ;  
 II —  $C_{\text{пов}} = 0,8$ ;  $C_{\text{гр}}^1 = 0,8$ ;  $h_{\text{гр}}^1 = 0,25$ ;  
 $C_{\text{гр}}^2 = 0,8$ ;  $h_{\text{гр}}^2 = 0,5$ ;  $C_{\text{гр}}^3 = 0,6$ ;  $h_{\text{гр}}^3 = 0,75$

С другой стороны, оказывается, что близкие результаты цементации можно получить при различных наборах управляющих параметров, включая и время  $\hat{t}$ . Соответствующее сопоставление для прежней постановки задачи проведено на рис. 4.11, где даны также значения управляющих параметров. Этот факт позволяет ставить задачу о поиске минимального времени цементации без потери качества.

Программная реализация алгоритма поиска  $\vec{p}$  позволяет сопоставить диффузионные кривые, получающиеся в результате цементации при различном числе реперных точек. Пусть, например, нас интересует профиль цементации второго из названных выше типов с некоторым подобием равномерного распределения концентрации углерода в приповерхностном слое. На рис. 4.12 указаны наилучшие в этом смысле профили, полученные при различных наборах реперных точек, а именно: а) две точки,  $\vec{q} = \{C_{\text{пов}}, (C_{\text{гр}}, h_{\text{гр}})\}$ ; б) несколько точек,  $\vec{q} = \{C_{\text{пов}}, (C_{\text{пов}}, h_{\text{гр}}^{(1)}), (C_{\text{пов}}, h_{\text{гр}}^{(2)}), (C_{\text{гр}}, h_{\text{гр}}^{(3)})\}$ .

Этим профилям соответствует следующие найденные значения управляющих параметров:

$$а) \vec{p}^1 = \{1,13\%; 8,00 \text{ ч}; 9,33 \text{ ч}; 0,83\%; 881,34 \text{ }^\circ\text{C}\};$$

$$б) \vec{p}^1 = \{1,12\%; 10,29 \text{ ч}; 10,58 \text{ ч}; 0,85\%; 850,0 \text{ }^\circ\text{C}\}$$

при  $t_1 = 930 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $\hat{t} = 20 \text{ ч}$ .

Сопоставление диффузионных профилей приводит, в частности, к выводу, что в рассматриваемых технологических условиях,

в частности при количественных ограничениях, заранее наложенных на искомые параметры, увеличение числа заданных реперных точек не приводит, вообще говоря, к улучшению качества цементации. Это не удивительно: задаваемые точки соответствуют априорным требованиям, предъявляемым к профилю, так сказать, желаемому эффекту, а вовсе не истинному распределению углерода, заранее неизвестному для оптимальных управляющих параметров, которые еще предстоит найти. Кроме того, заданные по необходимости количественные ограничения на искомые параметры также не могут быть согласованы с их оптимальными значениями, а потому ограничивают и результат управления.

Лучшее качество цементации можно получить путем изменения технологии процесса, и в этой связи обратимся к другой модели одновременного управления углеродным потенциалом и температурой среды.

В отличие от предшествующего случая, будем считать, что температура газовой среды меняется, как и углеродный потенциал, по линейному закону между значениями  $t_1$  и  $t_2$  на временном отрезке  $\hat{t}_1, \hat{t}_2$ . Заданной величиной будем считать  $t_2$ . Тогда управляющая функция характеризуется набором параметров:  $\vec{p}^{II} = \{C_{\text{окр}}, \hat{t}_1, \hat{t}_2, C_{\text{окр}}, t_1\}$ . Общая продолжительность процесса также является параметром управления, и ниже будет рассмотрена задача об оптимизации в смысле выбора минимального времени, при котором достигается заданное качество.

Как было отмечено выше (см. п. 4.4.3), наиболее экономичный способ решения такой задачи — это выбор  $\hat{t}$  на заданной сетке значений  $\{\hat{t}_i\}$  при автоматическом для каждого  $\hat{t}_i$  определении прочих управляющих параметров  $\vec{p}^{II}$ .

Требования к качеству цементации будем характеризовать наименьшей информацией о желаемом профиле, т. е. двумя реперными точками:  $\vec{q} = \{C_{\text{пов}}, (C_{\text{гр}}, h_{\text{гр}})\}$ .

В этом эксперименте расширим пределы количественных ограничений на искомые параметры, допуская те значения  $C_{\text{окр}}$ , при которых были построены номограммы в п. 4.3.

На рис. 4.13 диффузионные кривые «лучшего качества» II, соответствующие различным значениям  $\hat{t}$ , сравниваются с кривыми I, которые были получены при прежнем комплексном управлении. Видно, что качество профилей цементации в самом деле меняется в лучшую сторону. При новой технологии намечается более резкий спад концентрации за пределами эффективного слоя. Приведенные профили (рис. 4.13, а—в) соответствуют следующим значениям управляющих параметров:

$$а) \vec{p}^{II} = \{1,16\%; 4,59 \text{ ч}; 5,13 \text{ ч}; 0,81\%; 950,47^\circ\text{C}\}$$

$$\text{при } t_2 = 840^\circ\text{C}, \hat{t} = 7 \text{ ч}$$

$$\vec{p}^{II} = \{1,13\%; 3,22 \text{ ч}; 6,93 \text{ ч}; 0,84\%; 910,03^\circ\text{C}\}$$

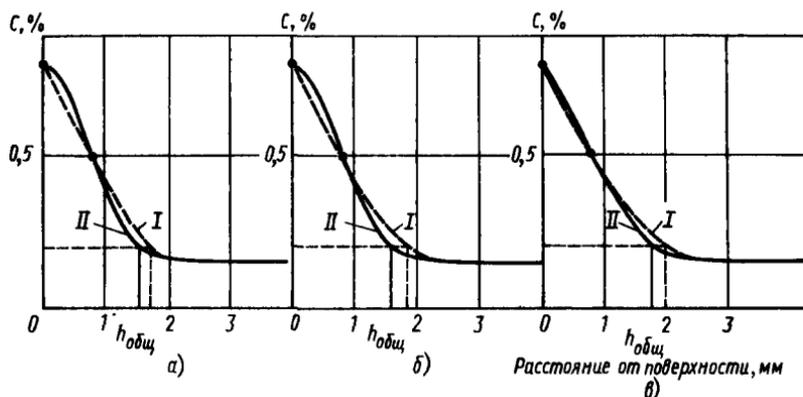


Рис. 4.13. Сравнение результатов двух типов управления ( $C_{пов} = 0,8$ ;  $C_{гр} = 0,5$ ;  $h_{гр} = 0,8$ )

при  $t_1 = 930^\circ\text{C}$ ,  $t = 8$  ч

$$б) \vec{p}^{II} = \{1,14\%; 5,77 \text{ ч}; 7,33 \text{ ч}; 0,82\%; 913,50^\circ\text{C}\}$$

при  $t_2 = 840^\circ\text{C}$ ,  $t = 10$  ч

$$\vec{p}^I = \{1,18\%; 0,81 \text{ ч}; 6,67 \text{ ч}; 0,84\%; 898,34^\circ\text{C}\}$$

при  $t_1 = 930^\circ\text{C}$ ,  $t = 10$  ч

$$в) \vec{p}^{II} = \{1,12\%; 4,42 \text{ ч}; 10,67 \text{ ч}; 0,83\%; 878,70^\circ\text{C}\}$$

при  $t_2 = 840^\circ\text{C}$ ,  $t = 20$  ч

$$\vec{p}^I = \{1,14\%; 0,04 \text{ ч}; 4,83 \text{ ч}; 0,83\%; 850,0^\circ\text{C}\}$$

при  $t_1 = 930^\circ\text{C}$ ,  $t = 20$  ч.

Проведенный математический эксперимент позволяет и при данной технологии изучить зависимость качества профиля цементации от ее продолжительности. Некоторые результаты соответствующего сопоставления приведены на рис. 4.14. Можно заключить, что при рассматриваемом управлении результирующей оптимальный профиль приобретает максимум ( $C^{max}$ ) в приповерхностном слое при достаточном малых  $t$ , и величина максимума растет с уменьшением  $t$ ; напротив, с увеличением  $t$  профиль теряет даже тенденцию к равномерному распределению углерода по глубине вблизи поверхности.

Учитывая допуск  $\delta_0$  на неравномерность распределения в приповерхностном слое, будем считать распределение и соответствующее  $t$  оптимальными в случае выполнения одного из следующих критериев: «а» —  $|C^{max} - C_{пов}| \leq \delta_0$ ; «б» — переход производной  $C(x, t)$  на поверхности через нуль (с учетом допуска). В качестве  $\delta_0$  естественно принять значение 0,05 %, подобно тому как это делается при оценке  $h_{общ}$ .

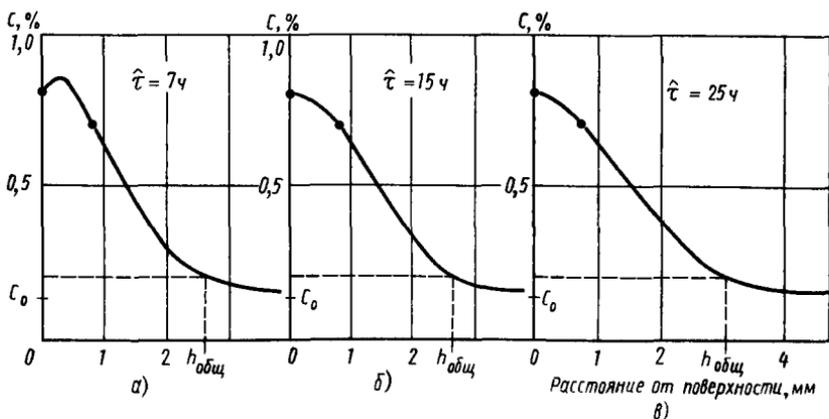


Рис. 4.14. Зависимость качества цементации от ее продолжительности ( $C_{\text{пов}} = 0,8$ ;  $C_{\text{гг}} = 0,7$ ;  $h_{\text{гг}} = 0,8$ ;  $t_2 = 840^\circ\text{C}$ ):

$\alpha \rightarrow \vec{p}^{II} \approx \{1,16\% ; 5,32 \text{ ч} ; 6,07 \text{ ч} ; 0,78\% ; 1046,17^\circ\text{C}\}$ ;  $\sigma \rightarrow \vec{p}^{II} \approx \{1,16\% ; 7,19 \text{ ч} ; 13,88 \text{ ч} ; 0,80\% ; 977,66^\circ\text{C}\}$ ;  $\epsilon \rightarrow \vec{p} \approx \{1,14\% ; 4,17 \text{ ч} ; 23,33 \text{ ч} ; 0,80\% ; 982,01^\circ\text{C}\}$

Введенный приближенный критерий определяет постановку задачи об оптимальном управлении без потери качества при рассматриваемой технологии. На рис. 4.15 проведено сопоставление «наилучших» профилей цементации при разных  $\hat{\tau}$  на заданной

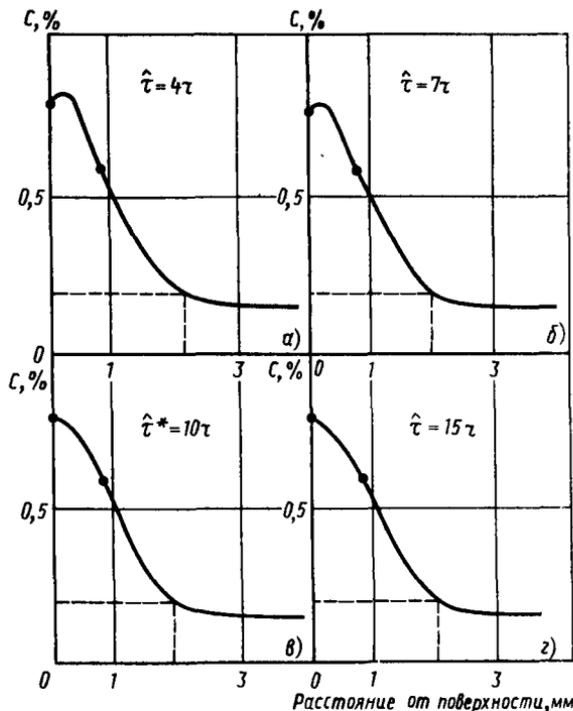


Рис. 4.15. Пример выбора оптимального управле-

ния  $\vec{p}^{II}$ , при  $\vec{q} = \{0,8 (0,6; 0,8)\}$  и  $t_2 = 840^\circ\text{C}$ :

$\alpha \rightarrow \vec{p}^{II} \approx \{1,16\% ; 8,56 \text{ ч} ; 3,82 \text{ ч} ; 0,67\% ; 1050,0^\circ\text{C}\}$ ;

$\sigma \rightarrow \vec{p}^{II} \approx \{1,16\% ; 4,83 \text{ ч} ; 5,60 \text{ ч} ; 0,80\% ; 994,52^\circ\text{C}\}$ ;

$\epsilon \rightarrow \vec{p}^{II*} \approx \{1,16\% ; 6,23 \text{ ч} ; 7,33 \text{ ч} ; 0,80\% ; 957,54^\circ\text{C}\}$ ;

$\epsilon \rightarrow \vec{p}^{II} \approx \{1,14\% ; 7,00 \text{ ч} ; 12,00 \text{ ч} ; 0,81\% ; 924,92^\circ\text{C}\}$

сетке значений и отмечен профиль, соответствующий оптимальному времени  $\hat{t}^*$ , выбранный на достаточно редкой сетке  $\hat{t}$  по критерию «б». Очевидно, оптимальное время может быть указано с повышенной точностью с помощью измельчения сетки  $\{\hat{t}_i\}$ . Для его поиска при наличии указанного выше критерия отбора может быть использован и метод «вилки» [35], действующий в автоматизированном режиме.

Разумеется, полученные для улучшенной технологии результаты могут быть основой и для построения номограмм, подобных приведенным в п. 4.3. Такие номограммы по-прежнему могли бы служить целям оптимального проектирования процесса. Этот вопрос был достаточно полно изложен выше, и здесь на нем не будем подробно останавливаться, отослав читателя к оригинальным работам [61, 53].

Обратимся к другой возможности усовершенствования модели управления.

#### 4.4.5. Постановка и возможности решения задачи о непрерывном и многостадийном управлении с помощью углеродного потенциала

Исходной информацией для задачи о непрерывной управляющей функции может служить только функция того же класса. В данном случае следует предположить заданным профиль концентрации в конечный момент времени  $\hat{t}$ . Естественно, что предугадать такой профиль в точном смысле невозможно, но зато технологу хорошо известен желаемый профиль распределения углерода, который обозначим  $\hat{\phi}(x)$ .

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы найти такую функцию  $C_{\text{онр}}(\tau)$  — непрерывно зависящий от времени углеродный потенциал газовой среды, при котором истинное распределение концентрации по глубине в конце процесса  $C(x, \hat{t})$  в среднем минимально отличалось бы от заданного профиля  $\hat{\phi}(x)$ .

Естественной мерой среднего уклонения одной функции  $\varphi_1(x)$  от другой  $\varphi_2(x)$  на отрезке  $[0, l]$  является величина

$$\rho_{L, [\varphi_1, \varphi_2]}^2 \equiv \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L, [\varphi_1, \varphi_2]}^2 \equiv \int_0^l \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\}^2 dx.$$

Соответственно целевая постановка задачи относительно  $C_{\text{онр}}(\tau)$  математически формулируется в виде

$$\bar{C}_{\text{онр}}(\tau) = \arg \inf \int_0^l \{C[x, \hat{t}, C_{\text{онр}}(\tau)] - \hat{\phi}(x)\}^2 dx. \quad (4.9)$$

Здесь распределение концентрации в конечный момент времени  $C[x, \hat{t}, C_{\text{онр}}]$  рассматривается как функционал от  $C_{\text{онр}}(\tau)$ . Это значит, что каждой заданной  $C_{\text{онр}}(\tau)$  соответствует свое

распределение концентрации  $C(x, \hat{t})$ . В п. 4.2 был описан комплекс алгоритмов вычисления  $C(x, \tau)$ , в том числе  $C(x, \hat{t})$ , при любой  $C_{\text{окр}}(\tau)$ . Таким образом, можно утверждать, что, как и в предшествующих постановках задачи управления цементацией, функция  $C[x, \hat{t}, C_{\text{окр}}]$  алгоритмически определена условиями задачи (4.1) с последующей подстановкой  $\tau = \hat{t}$ .

Задача (4.9) заведомо неустойчива в том смысле, что большим вариациям непрерывной функции  $C_{\text{окр}}(\tau)$  соответствуют малые вариации величины  $\inf \rho_{L_s}^2$ , и, следовательно, поставлена некорректно. Исключить такие вариации  $C_{\text{окр}}(\tau)$  можно алгоритмически, введя в постановку задачи стабилизатор А. Н. Тихонова — функционал  $\Omega(C_{\text{окр}})$ , конструкция которого учитывает ограничения, накладываемые на  $C_{\text{окр}}(\tau)$  условиями технической реализации (см. гл. 1).

В этом случае вместо целевого функционала рассматривается «сглаженный» целевой  $\rho_{L_s}^2(C, \hat{\phi}) + \alpha\Omega$ , где  $\alpha > 0$  — параметр вычислительного алгоритма.

Если известен допуск  $\delta$  на уклонение в среднем  $C(x, \hat{t})$  от  $\hat{\phi}(x)$ , то приемлемое значение  $\alpha$  алгоритмически определяется условием  $\rho_{L_s}^2(C[x, \hat{t}, C_{\text{окр}}^\alpha], \hat{\phi}) \leq \delta^2$ , где  $C_{\text{окр}}^\alpha$  — та функция, при которой достигается минимум сглаживающего функционала.

Таким образом, в соответствии с ранее изложенной общей методикой, нужное приближение управляющей функции можно найти, если: 1) задаться сходящейся к нулю последовательностью  $\{\alpha_s\}$ ,  $s = 0, 1, \dots$ ; 2) для каждого  $\alpha_s$  с помощью известных алгоритмов решить задачу

$$C_{\text{окр}}^s(\tau) = \text{arg inf} \{ \rho_{L_s}^2(C[x, \hat{t}, C_{\text{окр}}] + \alpha_s \Omega(C_{\text{окр}}), \hat{\phi}(x)) \}^2; \quad (4.10)$$

3) прервать процесс спуска по  $\alpha_s$  на том наибольшем значении  $\alpha_s$ , для которого выполняется условие  $\rho_{L_s}^2(C[x, \hat{t}, C_{\text{окр}}^s], \hat{\phi}(x)) \leq \delta^2$ .

Описанный алгоритм, разумеется, сложнее тех, что используются при специальной параметризации управляющей функции и результирующей диффузионной кривой, однако он также допускает реализацию на ЭВМ в автоматическом режиме.

Детали этой реализации и соответственно класс функций  $C_{\text{окр}}(\tau)$ , из которого алгоритмически выбирается решение, зависят от характера априорной информации о нем, т. е. от выбора стабилизатора.

Если возможно плавное изменение  $C_{\text{окр}}$ , то среди всех непрерывных функций естественно искать наиболее гладкую и тогда согласно работе [86]

$$\Omega(C_{\text{окр}}) = \int_0^{\tau} \{ q_1 C_{\text{окр}}^2(\tau) + q_2 C_{\text{окр}}^2(\tau) \} d\tau, \quad (4.11)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — любые положительные функции и числа. При замене непрерывной функции сеточной, что равносильно ее «мелкоступенчатой» аппроксимации, такой стабилизатор принимает вид

$$\Omega(y) = \sum_{j=1}^N \left( q_{1j} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\Delta} + q_{2j} y_j^2 \Delta \right),$$

где  $y_j = C_{\text{окр}}(\tau_j)$ .

Поскольку целевой функционал  $\rho_{L_2}^2$  также оказывается функцией многих переменных, добавление к нему стабилизатора в такой аппроксимации не усложняет задачу и для ее решения могут быть по-прежнему использованы алгоритмы минимизации функции многих переменных.

Если «крупноступенчатое» управление со сравнительно небольшим числом звеньев предпочтительнее плавного, то в качестве стабилизатора можно принять функцию

$$\Omega(C_{\text{окр}}) = \sum_{j=1}^n q_j (\bar{C}_j - y_j)^2, \quad (4.12)$$

где  $y_j = C_{\text{окр}}(\tau)$  при  $\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  и  $\tau_j$  — заданные граничные точки разбиения сегмента  $[0, \tau]$  на частичные, причем  $\tau_0 = 0$ ;  $q_j$  — некоторые положительные константы, а  $\bar{C}_j$  — заранее заданные значения концентрации. Такой стабилизатор в описанном выше алгоритме обеспечивает наименьшее отклонение углеродного потенциала из заданного класса от набора  $\{\bar{C}_j\}$ . Если нет оснований для выбора  $\{\bar{C}_j\}$  в соответствии с приближенными данными об управлении, то можно положить  $\bar{C}_j = 0$ .

Отметим, что при  $n = 2$  последняя постановка относится к простейшей модели управления [50] и этом случае использованные стабилизатора может оказаться полезным (см. гл. 1). Отметим также, что, не меняя структуру стабилизатора, можно понимать под  $y_j$  не только значения  $C_{\text{окр}}$  на частичных интервалах, но и другие величины, описывающие специальную структуру непрерывного управляющего углеродного потенциала, такие, как в предшествующем пункте; можно включить в число  $y_j$  значения температуры на частичных интегралах либо другие величины, характеризующие непрерывный «профиль» температуры печи. В этом случае можно решать задачу многостадийного управления. В частности, при  $n = 5$  и соответствующей предыдущему пункту спецификации параметров приходим к задаче с двух-трехстадийным управлением, рассмотренной выше. При этом величины  $q_j$  можно рассматривать как весовые множители, уравнивающие влияние различных размерностей и, возможно, порядков.

Отметим, что рассматриваемый аспект автоматизации обязывает согласовывать выбор модели управления не только с технологическими возможностями, но и с мощностью вычислительной

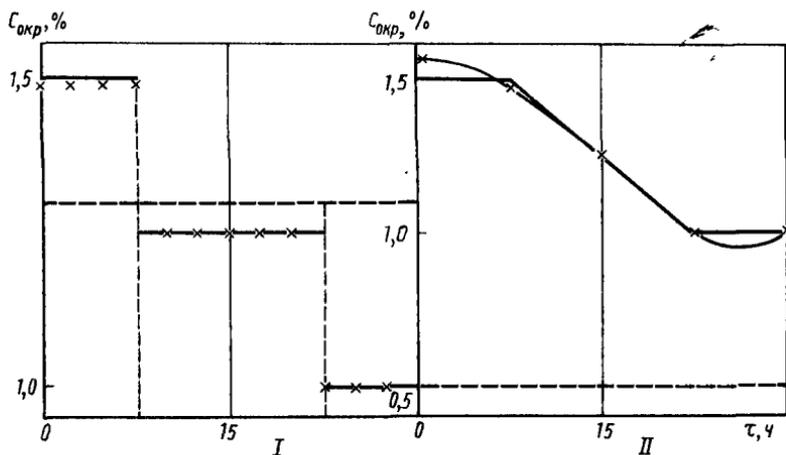


Рис. 4.16. Две модели (I, II) управления цементации:

— заданное управление; - - - начальное приближение; x — найденное управление

техники, которая, как предполагается, работает «на линии» с технологической установкой и, значит, должна выдавать результаты в реальном времени.

В работе [65] возможности рассматриваемых постановок изучались на моделях, характеризуемых или аппроксимируемых небольшим числом параметров. Математически эксперимент строился следующим образом. Сначала для конкретного управления того или иного вида решалась «прямая» задача (4.1) и рассчитывался профиль  $C(x, \tau)$ . Затем этот профиль принимался за желаемый:  $C(x, \tau) \equiv \varphi(x)$  и с помощью описанного выше регуляризирующего оператора со стабилизатором, более соответствующим характеру управления, разыскивалось управление.

Результаты, приведенные на рис. 4.16 для стали 15 (I, II), относятся к варианту с параметрами:  $\tau = 30$  ч,  $l = 10$  м,  $t = 930$  °С. Множители  $q_j$  были приняты равными единице. На этом рисунке найденный потенциал сопоставляется также с его начальным приближением, выбранным для итерационного цикла минимизации. Профиль концентрации, по которому проводилось восстановление, аппроксимирован сеточной функцией, представленной для ступенчатого управления на рис. 4.17.

Из результатов этого эксперимента можно заключить, что в случае, если желаемый профиль концентрации в точности отвечает некоторому реальному управлению, предложенный алгоритм восстанавливает его вполне удовлетворительно. То, что при восстановлении трехстадийного управления имеется заметная погрешность ( $\sim 10\%$ ), объясняется тем, что стабилизатор, требующий гладкости, не соответствует характеру модели, имеющей угловые точки. Тем не менее этот стабилизатор больше соответ-

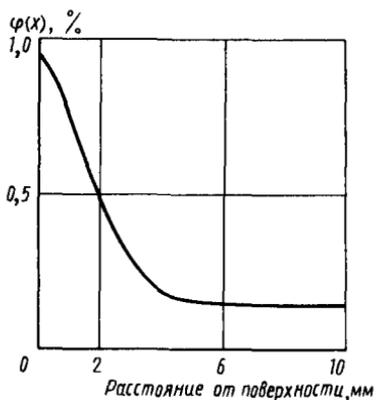


Рис. 4.17. Заданное распределение концентрации по глубине для ступенчатого управления

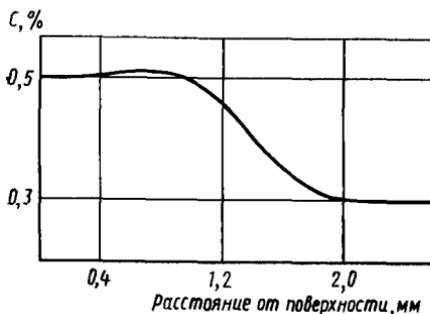


Рис. 4.18. Экспериментальное распределение концентрации углерода по глубине

ствует модели нежели другой, ориентированный на разрывные функции; последний дал бы (и действительно дает [65]) еще большую погрешность. Восстановить такое управление с точностью, соответствующей точности предыдущего, можно, выбрав переменными величинами такие же, как и в задачах предшествующего раздела:  $y_1 = C_{\text{окр}}^{\text{max}}$ ,  $y_2 = \hat{t}_1$ ,  $y_3 = \hat{t}_2$ ,  $y_4 = C_{\text{окр}}^{\text{min}}$ . При этом, разумеется, нужно было бы задать  $C_{\text{окр}}(\tau)$  в условиях задачи (4.1) соответствующей формулой.

Близкий к идеальному профиль распределения концентрации в конце процесса, сопоставимый с классом функций, имеющих равномерное распределение в некотором эффективном слое и резкий спад концентрации вне его, удалось получить на Московском автомобильном заводе имени И. А. Лихачева. Для стали 30 при  $t = 930^\circ\text{C}$  и  $\hat{t} = 10$  ч он изображен на рис. 4.18. Соответствующее аппроксимации этого профиля управление, найденное описанным выше алгоритмом на множестве непрерывных функций, представлено на рис. 4.19 (кривая I). Ее реальным эквивалентом при столь грубой аппроксимирующей сетке значений  $\tau$  служит кусочно-линейная непрерывная кривая (рис. 4.19, кривая II).

Полученные результаты показывают, что предлагаемая методика при наличии соответствующего инструментально-технического обеспечения позволяет расширить класс

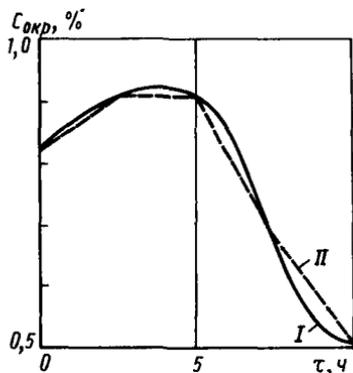


Рис. 4.19. Найденное управление экспериментальным процессом цементации

моделей управления и решать в реальном времени задачи оперативного управления с улучшением качества цементации.

#### 4.5. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ВОСПОЛНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ О ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА

Выше (см. п. 4.3, 4.4) предполагалось, что сформулированная математическая модель (4.1) адекватна ее реальному прототипу. Для определенного класса реальных процессов это действительно так. Однако ни принятые функциональные параметры материала, ни даже общая динамика процесса, заложенная в условиях задачи (4.1), не исчерпывает, разумеется, всех реальных ситуаций, и потому по отношению ко многим из них принятая модель может обеспечить лишь достаточно приближенные качественные суждения. Такое положение вещей характерно для задач математического моделирования, и, как отмечалось во введении, для уточнения модели в подобной ситуации можно использовать косвенную информацию, получаемую в специально поставленном эксперименте.

В данном пункте рассмотрим примеры такого типа задач, связанных с технологией цементации. При этом, наряду с применением точной математической теории и методики, можно более широко взглянуть на метод обратных задач и подвергнуть экспериментальной апробации достаточно общее понятие обратной задачи, сформулированное в гл. 1.

##### 4.5.1. О моделях диффузионного процесса в пористых средах

Экспериментально установлено, что в пористых материалах, получаемых, например, при спекании металлических и металлокерамических порошков, глубина проникновения вещества при диффузии выше, чем в монолитных поликристаллических материалах за то же время. Так, на рис. 4.20 кривая I изображает профиль цементации стали 20, кривые II, III изображают профили цементации образцов из порошковых материалов состава Fe + 2,5 % Si с различной объемной пористостью (для II и III открытые поры занимают соответственно 10,8 и 17,2 % объема; закрытые — 7,4 и 7,6 %).

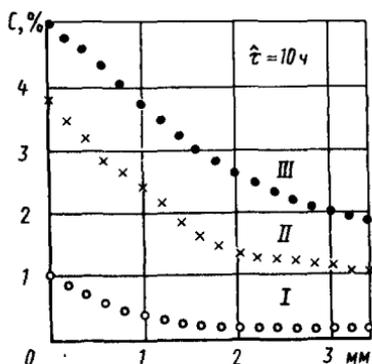


Рис. 4.20. Распределение углерода при цементации различных материалов

Ввиду того, что диффузия является структурно чувствительным процессом, подобный эффект естественно объяснить различием механизмов проникновения атомов диффундирующего вещества в сплошных и пористых материалах вследствие различия их строения.

В сплошном материале с упорядоченной кристаллической структурой характерным для процессов цементации и нитроцементации является механизм образования прежде всего твердых растворов внедрения, связанный с перемещением атомов диффундирующего газа между узлами кристаллической решетки и прямым обменом местами атомов разного типа [27].

В порошковых материалах, для которых характерна разупорядоченная зернистая структура, возникают другие механизмы: диффузия по границам зерен, в порах и т. п., увеличивающие скорость насыщения. В работе [8] отмечено, что толщина приповерхностного слоя в пористом материале, в котором наблюдается значительная разупорядоченность атомов, оценивается в  $5 \cdot 10^{-10}$ — $10^{-6}$  м, а коэффициент диффузии возрастает в  $10^3$ — $10^5$  раз по сравнению с его величиной в сплошном материале.

Здесь имеется в виду так называемый эффективный коэффициент диффузии, и одним из способов описания процессов в пористых или композитных средах является введение таких коэффициентов в уравнения диффузии.

Методом расчета эффективных параметров материала посвящена обширная литература [29 и др.], в связи с этим остановимся лишь на некоторых основных моментах.

Физические характеристики материала можно разделить на два типа: массовые и поточные. К числу первых относятся плотность, теплоемкость и другие величины, эффективные значения которых в композитном, в частности пористом, материале зависят исключительно от отношения объемов компонент, например в двухкомпонентном материале от параметра  $\mu_2 = V_2/V_1$ . Подобный параметр вводится и при расчете поточных характеристик материала, к числу которых относятся коэффициенты диффузии и теплопроводности, электрическая проводимость и др.; однако эффективные значения последних зависят не только от указанного параметра, но еще и от характера расположения компонент по отношению к направлению потока (вещества, теплоты, электричества и др.). Так, например, для пористой среды с относительным объемом пор  $V_2$ , плотностью  $\gamma$  компактного материала эффективная плотность независимо от расположения пор выражается формулой  $\gamma_n = \gamma / (1 + \mu_2)$ , причем та же зависимость обычно принимается и в случае, когда плотность является функцией неструктурных величин; для эффективного коэффициента диффузии  $D_n$  эта формула, вообще говоря, уже не применима.

Для учета влияния структуры наряду со статистическим ее описанием часто вводят идеализированную упорядоченную модель, когда среда представляется состоящей из множества ячеек

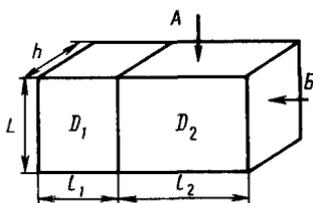


Рис. 4.21. Строение ячейки композиционного материала простейшей структуры

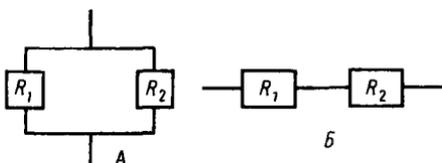


Рис. 4.22. Возможные схемы тепловых сопротивлений, соответствующие ячейке структуры с распределенными параметрами

однотипной структуры. Такая идеализация допустима, если при этом полученная упорядоченная структура сохраняет основные физические качества реальной хаотической (например, изотропность или определенного рода анизотропию, механическую устойчивость, геометрическое равноправие или неравноправие компонент) и в этом случае она считается адекватной реальной. Разумеется, проверка адекватности структур, как и в любой теории, дело последующего физического эксперимента.

Вслед за введенной идеализацией выбирается то или иное строение отдельной ячейки. Естественной классификацией при этом является представление о структурах с вкраплением и структурах с взаимопроникающими компонентами. В обоих случаях возможны самые разнообразные модели включений или каналов, мыслимы и программы-датчики для ЭВМ, рассчитывающие эффективные характеристики для достаточно произвольной модели.

Для простейших моделей искомый параметр может быть определен подобно тому, как эффективная электрическая проводимость рассчитывается через сопротивление разветвленной цепи. Если структура ячейки обладает, в свою очередь, некоторой симметрией, то при расчете можно использовать лишь соответствующую ее долю: половину, четверть и т. д.

Рассмотрим, например, схемы расчета коэффициента диффузии для различных простейших структур элементарной ячейки. Введем сопротивление потоку масс, определяемое для однородной цилиндрической ячейки формулой  $R = L/(DS)$ , где  $D$  — коэффициент диффузии;  $L$  — длина ячейки в направлении потока вещества;  $S$  — площадь поперечного сечения ячейки. Пусть ячейка, однородная в направлении, перпендикулярном к чертежу, имеет строение, представленное на рис. 4.21. Тогда, в зависимости от направления потока, ей можно поставить в соответствие одну из двух схем (А, Б), представленных на рис. 4.22. Для схемы А  $(1/R) = (1/R_1) + (1/R_2)$ , откуда в силу соотношений  $R_i = L/D_i S_i$ ,  $S_i = l_i h$  для эффективного коэффициента диффузии имеем  $D = (D_1 l_1 + D_2 l_2)/(l_1 + l_2)$ . Для схемы Б  $R = R_1 + R_2$  и аналогично получаем  $D = D_1 D_2 (l_1 + l_2)/(l_2 D_1 + l_1 D_2)$ . Подобный расчет возможен и для более сложного строения ячеек спе-

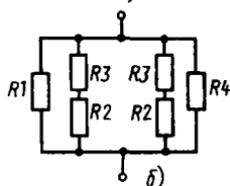
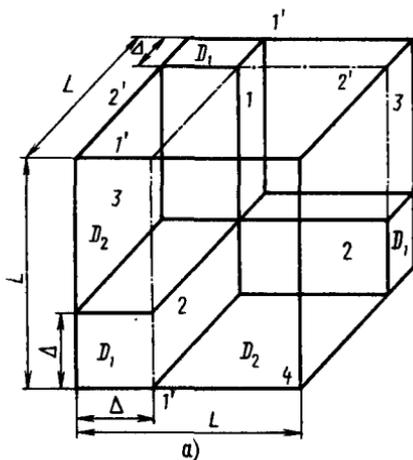
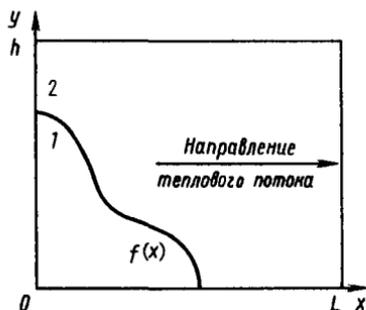


Рис. 4.23. Схема ячейки с взаимопроницаемыми компонентами:

*a* — восьмая часть ячейки; *b* — схема соединения

Рис. 4.24. Ячейка структуры с произвольной границей раздела между компонентами



ченных порошковых материалов. Так, для показанной на рис. 4.23, *a* ячейки расчет проводится в соответствии со схемой, представленной на рис. 4.23, *b*.

При произвольных границах раздела компонент, не обязательно совпадающих с линиями тока или поверхностями равной концентрации, расчет эффективного параметра сводится к численному решению некоторой краевой задачи, моделирующей соответствующий физический эксперимент.

Так, например, для ячейки, представленной на рис. 4.24, эффективный коэффициент диффузии

$$D = \frac{L}{h(C_2 - C_1)} \int_0^h \frac{\partial C}{\partial x}(L, y) dy, \quad (4.13)$$

где концентрация  $C$  определяется решением следующей краевой задачи. Пусть кривая  $y = f(x)$  — граница раздела двух сред 1 и 2 с коэффициентами диффузии  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда  $\Delta C_i = 0$  при  $i = 1, 2$ ,  $C_1 = C_2$  и  $D_1(\partial C_1/\partial x) = D_2(\partial C_2/\partial x)$  на границе раздела;  $(\partial C/\partial y) = 0$  при  $y = 0, h$ ;  $C = C_1$  при  $x = 0$  и  $C = C_2$  при  $x = L$ .

Эта краевая задача является математической моделью физического эксперимента по определению эффективного коэффициента диффузии в условиях стационарного режима, на котором основываются обычно экспериментальные методы.

Краевая задача решается на ЭВМ разностными методами. М. А. Осипенко показано, что для расчетов с небольшой точностью можно использовать приближенную формулу

$$D = \frac{L}{h} \int_0^h \frac{D_1 D_2}{D_1(1-f(x)) + D_2 f(x)} dx. \quad (4.14)$$

Изложенный подход к определению эффективного коэффициента можно рассматривать в конечном счете как некоторую обратную задачу. В самом деле, из-за неопределенности в идеализации структуры и выборе строения ячейки нельзя заранее утверждать, что наша модель адекватна истинной структуре. Этот вопрос решается практически косвенным экспериментом уже после того, как на основе постулированной модели проведены расчеты, например, полей концентрации и полученные результаты сопоставлены с данными измерений. Такая процедура отличается от приведенных выше постановок и методик решений обратных задач лишь тем, что здесь решение ищется путем подбора на заданном достаточно узком множестве моделей. Впрочем при подобной практике обратная задача часто даже не ставится, а полученные результаты расчета используются для чисто качественной оценки итогов процесса.

На уровне такой качественной оценки можно объяснить и эффект увеличения скорости диффузии в пористых материалах. Для стального порошкового материала (коэффициент диффузии  $D_1$  стали) примем вариант Б ячейки (см. рис. 4.22), а коэффициент диффузии метана в заполненную воздухом пору  $D_2 = 186 (T/273,15)^{1,747}$  см<sup>2</sup>/с, где  $T$  — температура, К ( $D_2 \approx 10^6 D_1$ ). Тогда при  $\mu_2 = 0,4$  эффективный коэффициент диффузии  $D \approx 3,8 D_1$ . Расчет поля концентраций с таким коэффициентом диффузии при  $\beta = 10^{-4}$  см/с,  $l = 2$  см,  $t = 5$  ч обнаруживает тенденцию, представленную на рис. 4.25.

Более существенно, однако, обратить внимание на следующее обстоятельство. Построенная математическая модель процесса, даже будучи адекватной реальному процессу, является чисто феноменологической. Иначе говоря, она не основана на представлении о механизме диффузии в пористой среде и потому не объясняет этого механиз-

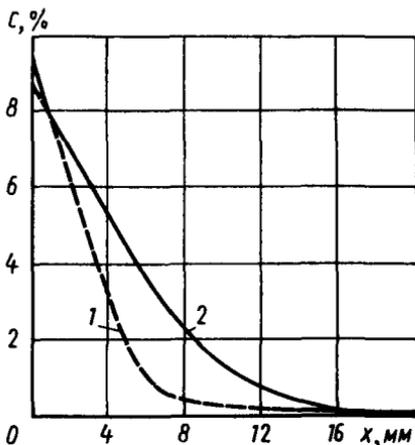


Рис. 4.25. Распределение углерода при длительном процессе  $t = 5$  ч: 1 — для сплошного материала с коэффициентом  $D_1$ ; 2 — для пористого материала с эффективным коэффициентом  $D$

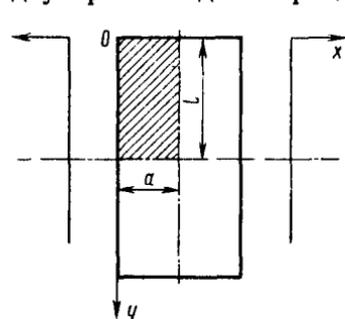
ма. Соответственно оценки скорости диффузии, полученные в рамках такой модели, не обязаны совпадать с экспериментальными. Действительно, по смыслу модели при этом оценивается лишь некоторая величина, «осредняющая» скорости диффузии в порах и монолитной массе среды. Технолога же интересует главным образом скорость диффузии в монолите при наличии пор, поскольку только его насыщением определяются прочностные свойства образца.

#### 4.5.2. Проверка одной гипотезы о механизме диффузии в пористых материалах

Для решения поставленных математических вопросов должна быть построена математическая модель, основанная на той или иной гипотезе о решающем факторе механизма диффузии в пористых материалах.

Такая модель может быть построена на основе экспериментальных результатов, полученных в работе [60], согласно которым механизм насыщения пористых материалов из газовой среды заключается в следующем. В открытых (т. е. расположенных у поверхности или канализированных к поверхности детали) порах слоя толщиной 0,2—0,5 мм образуется сажа. При этом происходит ускоренная диффузия углерода из этого слоя в глубь детали по поверхности открытых пор с одновременным стоком углерода в объем зерен.

Соответствующая гипотеза о природе ускорения диффузии в пористых материалах проверяется затем (или отвергается) с помощью математического эксперимента на ЭВМ, и таким образом, по существу, решается обратная задача об определении причины экспериментально наблюдаемого эффекта, хотя бы и на качественном уровне. В случае положительного ответа количественные оценки могут быть найдены уже уточнением формулировки рассматриваемой обратной задачи, например, в рамках устойчивых вариационных постановок (см. гл. 1). Обратимся к математической модели, позволяющей изучить влияние указанного в работе [60] механизма. Для простоты ограничимся рассмотрением двумерной модели процесса [53].



Реальное пористое тело можно представить в виде периодически чередующихся ячеек, состоящих из щели и сплошной среды (рис. 4.26). Примем, что: 1) горизонтальный размер ячеек  $a$  мал по сравнению с глубиной цементации  $l$ , а именно  $a^2 = 10^{-2}l$ ; параметр  $a$  определяется

Рис. 4.26. Элементарная двумерная ячейка пористого материала (заштрихованная часть)

Рис. 4.27. Распределение углерода по толщине пористого (—) и компактного (---) образцов при различной длительности насыщения:

1, 4 — 10 ч; 2 — 1,4 ч; 3 — 3,4 ч

пористостью порошкового материала и представляет собой среднее расстояние между открытыми порами; с увеличением пористости  $a$  уменьшается; 2) на границе ячейки, в том числе в поре, происходит массообмен по закону Ньютона с кинетическим коэффициентом  $\beta = 7,13 \exp(-14 800/T)$  [50], где  $T$  — температура, К.

Скорость диффузии на поверхности поры хотя и сравнительно велика, но конечна. В этом случае граничное условие на поверхности поры имеет следующий вид:

$$C_{\text{окр}}^{\text{пор}} = \begin{cases} C_{\text{саж}} & \text{при } y \leq \bar{\Delta}; \\ C_{\text{саж}} [1 - \Phi(y, \vartheta)] & \text{при } \bar{\Delta} < y \leq l, \end{cases} \quad (4.15)$$

где  $C_{\text{саж}} = 1,4\%$ ;  $\Phi(y, \vartheta) \equiv \Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-p^2} dp$ ;  $z = y/2 \sqrt{D^* \vartheta}$ ;

$D^* \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$  — коэффициент диффузии углерода по поверхности поры.

Формула (4.15) — решение одномерной задачи диффузии на полубесконечной прямой [38].

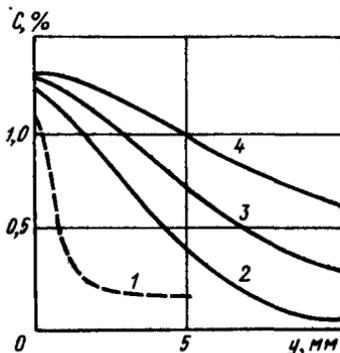
Углеродный потенциал внешней среды постоянен  $C_{\text{окр}} = 1,2\%$ . Тогда процесс диффузии описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D(C) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D(C) \frac{\partial C}{\partial y} \right) & (4.16) \\ (0 < \vartheta \leq t, 0 < x < a, 0 < y < l); \\ C|_{\tau=0} &= \bar{C}_0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0; \\ -D(C) \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \beta (C_{\text{окр}}^{\text{пор}} - C) \Big|_{x=0}; \\ -D(C) \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \beta (C_{\text{окр}}^{\text{пор}} - C) \Big|_{y=0}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $\bar{C}_0$  — начальное содержание углерода;  $D(C)$  — коэффициент диффузии углерода в Fe ( $\gamma$ ).

Система уравнений (4.16), (4.17) решается на ЭВМ конечно-разностным методом с помощью продольно-поперечной схемы (неявный метод переменных направлений в итерационном цикле [73]).

Результат математического эксперимента  $C = C(x = (l/2), y, \vartheta)$ , представленный на рис. 4.27 для  $a = 0,1 \text{ мм}$ ;  $l = 10 \text{ мм}$ ;



$\bar{\Delta} = 0,02$  мм;  $\bar{\tau} = 10$  ч;  $t = 920$  °С;  $\bar{C}_0 = 0,2$  %, подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работах [5, 60]. Это доказывает справедливость высказанной гипотезы относительно природы увеличения скорости диффузии в пористых телах.

Развитием полученного результата на пути математического моделирования процесса может быть, как было отмечено, математическая формулировка обратных задач и разработка элементов математического обеспечения оперативного управления цементацией пористых материалов.

Вместе с тем уже в рамках построенной модели оказывается возможным дать номографическое описание эффекта, полезное для априорного проектирования процесса.

Предметом такого описания [61] является зависимость времени цементации от характеристик пористого образца  $\{a, l\}$  и требуемых выходных параметров процесса  $\{C_{гр}, h_{эф}\}$ . Отметим, что ввиду поверхностного характера цементации величина  $l$  является скорее условным параметром. Напротив, величина  $a$ , характеризующая среднюю линейную плотность пор вдоль сечения поверхности образца, является существенным параметром материала.

Номограммы получаются дополнительной обработкой поля концентраций, полученного в результате математического эксперимента. Обработка состоит в следующем: а) на заданной сетке значений  $\tau, C_{гр}$ :  $C_{гр} \in \{C_{гр}^s\}$  — строят линии уровня, определяемые уравнениями  $C(x, y, \tau) = C_{гр}^s$ ; эта операция геометрически эквивалентна проектированию на плоскость  $(x, y)$  сечения плоскостью  $C = C_{гр}^s$  поверхности, изображающей поле концентраций при фиксированном  $\tau$  (рис. 4.28), а проекция может быть найдена автоматически в табличной форме численным решением указанного уравнения; а) взяв в плоскости  $(x, y)$  сечение  $x = a$ , ре-

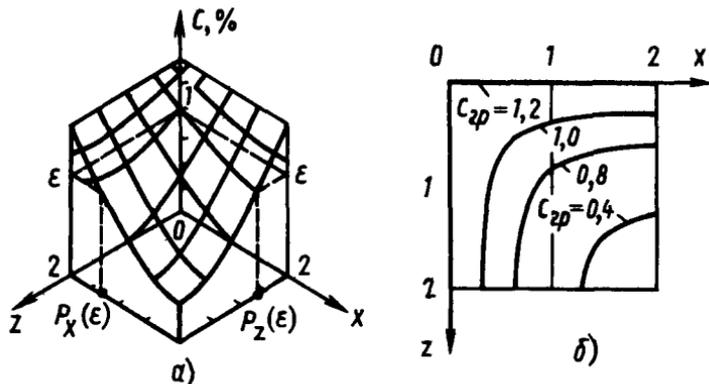


Рис. 4.28. Поле концентраций (а) и линии уровня поля концентрации  $C = \varepsilon$  (б) при  $\tau = 7$  ч;  $a = l = 2$  мм

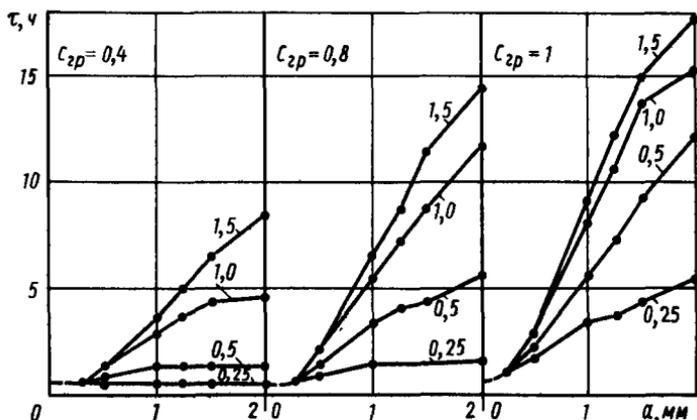


Рис. 4.29. Номограммы времени нагрева до заданной концентрации  $C_{гр}$  на фиксированной глубине  $h_{эф}$  при  $l = 2$  мм. Цифры у кривых —  $h_{эф}$ , мм

шаем уравнение  $C(a, y, \varphi) = C_{гр}^s$  относительно  $y$ , что также можно выполнить автоматически на ЭВМ для каждого  $\varphi$ ; геометрическая интерпретация этой операции проиллюстрирована штриховыми линиями на рис. 4.28, а. Очевидно, в результате для каждой совокупности значений  $\{a, C_{гр}, \varphi\}$  на выбранной сетке значений получается  $h_{эф}$ .

Результирующие номограммы представляют собой множество изображенных на различных листах пучков кривых (рис. 4.29). Каждый пучок (лист) соответствует одному из значений  $C_{гр}$ . Различные кривые одного и того же пучка отвечают различным значениям  $h_{эф}$ . Каждая кривая изображает зависимость времени цементации от размеров ячейки (плотности пор). На упомянутом рисунке представлены номограммы, соответствующие стальному порошку (сталь 30) с размером частиц  $l = 2$  мм. Общая точка кривых соответствует началу выдержки газовой среды при постоянной температуре  $t = 920$  °С в момент времени  $\varphi = 24$  мин.

Приведенные номограммы позволяют, в частности, оценить время цементации, необходимое для получения требуемого эффекта — заданной в монолите толщины эффективного слоя, — в зависимости от степени пористости материала. Например, как видно из рис. 4.29, концентрация  $C_{гр} = 0,8$  % на глубине  $h_{эф} = 0,25$  мм в порошковом материале, для которого  $a = 1$  мм, может быть достигнута за 1,6 ч. В целом варьирование степени пористости номинально позволяет сократить время цементации примерно в 10 раз.

Разумеется, подобные оценки следует принимать с учетом и других аспектов влияния степени пористости на механические свойства образцов. Их разумное использование на уровне проектирования может способствовать экономии энергии и повышению производительности печи в реальных технологических процессах.

### 4.5.3. Задача об определении термокинетического коэффициента по минимальной информации о поле концентраций в процессах цементации

В предшествующих пунктах задачи решали в предположении, что термокинетический коэффициент  $\beta$ , как и другие параметры модели, известен и к тому же представляет собой некоторую константу. Однако для многих материалов эта константа неизвестна, и тогда можно решить простейшую обратную задачу, в которой  $\beta$  определяется по косвенным данным о поле концентраций. Искомый параметр входит в условия задачи (4.1) таким образом, что для его определения недостаточно значения концентрации в какой-либо точке поверхности, нужна еще и производная в этой точке. Поскольку данные измерений поля, а тем более и производная по  $x$  содержат конечные погрешности, определяемая таким путем величина  $\beta$  может оказаться далекой от истинного значения. Ошибку можно, по-видимому, уменьшить, если многократно повторить измерения, относя их к различным моментам времени, а затем подвергнуть результаты обработке по методу наименьших квадратов. Но это означает, что для определения  $\beta$  используется информация, близкая к той, которая требуется для решения более общей задачи: об определении функции  $\beta = \beta(C)$  по заданной концентрации  $\varphi(\tau)$  на поверхности  $x = 0$ .

Эта задача представляет самостоятельный интерес, охватывая более общие условия массообмена на поверхности цементуемого образца. Высказанные выше соображения приводят к заключению, что задание  $\varphi(\tau)$  является минимальной дополнительной информацией для определения  $\beta(C)$ . Можно доказать [65], что решение такой задачи (задача I) при точном задании  $\varphi(\tau)$  единственно, так что указанная информация является и достаточной.

Наряду с этим возможна и другая постановка общей задачи (задача II): определить  $\beta(C)$  по заданному в некоторый, например конечный, момент профилю концентрации по глубине:  $\varphi(x) = C(x, \hat{t})$ . Эта постановка может оказаться предпочтительной, поскольку измерения в последнем случае проводятся уже по окончании процесса цементации.

Таким образом, введя в рассмотрение совокупность операций, разрешающую задачу (4.1) при заданном коэффициенте диффузии и  $\beta(C)$  (т. е. для заданного материала), с последующей постановкой либо  $x = 0$ , либо  $\tau = \hat{t}$ , можно утверждать, что при каждой из них алгоритмически определена одна функция: либо  $C[0, \tau, \beta]$ , либо  $C[x, \hat{t}, \beta]$ , сопоставимая соответственно либо с  $\varphi(\tau)$ , либо с  $\varphi(x)$ .

Для регуляризации соответствующих обратных задач введем стабилизатор, в качестве которого естественно выбрать

$$\Omega(\beta) = \|\beta\|_{\omega_2}^2 = \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}} [\beta^2(\xi) - (\beta(\xi) - \bar{\beta})^2] d\xi. \text{ Здесь } \{\bar{c}_0, \bar{c}\} \text{ — мно-}$$

жество значений концентрации;  $\bar{C}_0$  — начальная концентрация углерода и одновременно минимальное ее значение;  $\bar{C}$  — максимально возможное значение концентрации, оценка которого может быть получена, например, по исходным данным:  $\varphi(\tau)$  или  $\psi(x)$ ; наконец,  $\bar{\beta} = \text{const}$  выражает априорное представление о «порядке величины»  $\beta$ , если таковое имеется. В качестве  $\bar{\beta}$  можно принять, например, известное для сходных материалов постоянное значение  $\beta$  либо 0 (при отсутствии какой-либо информации).

Первая постановка задачи (когда задана  $\varphi(\tau)$ ) совершенно аналогична той, которая использовалась в гл. 3 при определении коэффициента массообмена на завершающей стадии закалки. В этом случае можно преобразовать  $\beta(C)$  к функции времени: так как  $\varphi(\tau) = C(0, \tau)$ , а  $\beta(C)$  входит только в граничное условие, то  $\beta(C(0, \tau)) = \beta(\varphi(\tau)) = \beta(\tau)$ . Поэтому можно при-

нять  $\Omega = \int_0^{\tau} [(\bar{\beta}'(\tau))^2 + (\bar{\beta} - \bar{\beta})^2] d\tau$ . Исходное выражение  $\Omega$  является, однако, более общим.

Целевой функционал целесообразно формулировать для рассматриваемых задач несколько по-разному. Для задачи I — это обычная среднеквадратичная оценка отклонения рассчитанной при заданном  $\beta$  концентрации на поверхности от измеренной:  $f(\beta) = \int_0^{\tau} \{C(0, \tau, \beta) - \varphi(\tau)\}^2 d\tau$ . Для задачи II следует учесть, что измеренная диффузионная кривая, как и искомая, соответствует функции, экспоненциально убывающей с глубиной. В этом случае во избежание потери информации при вычислениях лучше пользоваться «взвешенным» отклонением того же типа, приняв за «весовой множитель» под интегралом  $1/\psi(x)$ . Соответственно

$$\tilde{f}(\beta) = \int_0^l \psi^{-1}(x) \{C[x, \tau, \beta] - \psi(x)\}^2 dx.$$

В обоих случаях регуляризованная постановка обратной задачи об определении  $\beta$  формулируется как вариационная:

$$\beta(C) = \arg \inf F(\beta), \quad F(\beta) = f(\beta) + \alpha_p \Omega(\beta), \quad (4.18)$$

где  $\{\alpha_p\}$  — монотонно убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Эта вариационная задача решается на ЭВМ с помощью алгоритмов, описанных выше (см. гл. 1), при каждом  $\alpha_p \in \{\alpha_p\}$ . Процесс спуска по параметру  $\alpha$  прерывается, как только оказывается выполненным условие  $f(\beta_p) \leq \delta^2$ , где  $\beta_p = \beta_p(C)$  — функция, минимизирующая сглаживающий функционал  $F(\beta)$  при  $\alpha = \alpha_p$ ,  $\delta$  — среднеквадратичная погрешность измерений.

В работе [65] эффективность описанного метода показана посредством специального вычислительного эксперимента на ЭВМ БЭСМ-6. Расчеты проводились для сталей 25ХГМ и 30ХГТ с приведенным в начале главы коэффициентом диффузии при  $l = 0,02$  м и  $\hat{t} = 12$  ч.

Постановка такого эксперимента одновременно позволяет ответить на вопрос о том, какой должна быть точность измерений поля концентраций, для того чтобы искомая функция  $\beta = \beta(C)$  была восстановлена с приемлемой для использования точностью. Иначе говоря, другим вопросом, решаемым расчетным путем, является вопрос о планировании физического эксперимента для получения исходных данных, необходимых для решения обратной задачи.

Численный эксперимент строился следующим образом. По заданной функции  $\beta(C)$  решалась на ЭВМ прямая задача, и на некоторых сетках значений аргумента определялась функция:  $\varphi(\tau)$  либо  $\psi(x)$ . Затем в значения этих функций вносились возмущения, имитирующие погрешности измерений различных уровней. Для этого использовалась специальная ЭВМ — подпрограмма-датчик случайных чисел. По этим «испорченным» данным с помощью описанной выше методики решалась соответствующая обратная задача. Найденное таким образом ее решение можно сравнить с известной  $\beta(C)$  и тем самым оценить погрешность вос-

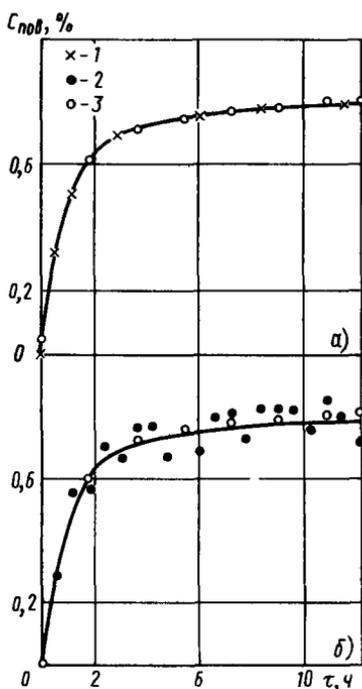


Рис. 4.30. Поверхностная концентрация:

— точные данные задачи 1; 1, 2 — данные с «возмущением» 1 и 10 %; 3 — данные, отвечающие восстановленному профилю

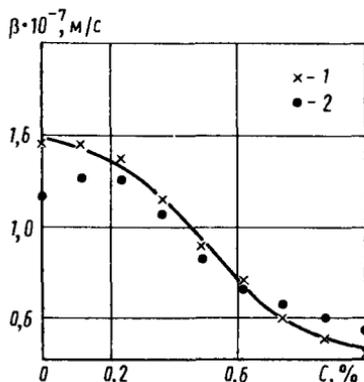


Рис. 4.31. Кинетический коэффициент точный (—) и восстановленный при данных задачи 1 с возмущением 1 % (1), 10 % (2)

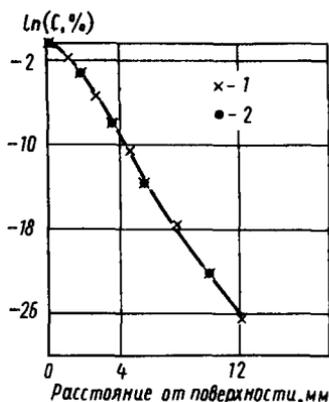


Рис. 4.32. Профили концентрации в задаче II точный (—) с возмущением 1 % (1) и восстановленный (2)

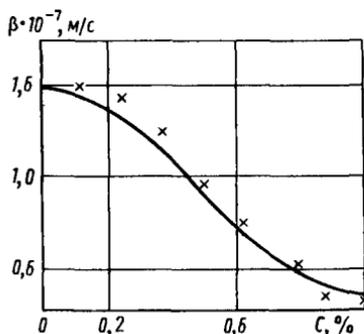


Рис. 4.33. Кинетический коэффициент точный (—) и восстановленный при данных задачи II с возмущением 1 % (x)

становления. Отметим, что использованный здесь прием — оценка погрешности на «модельных задачах» — является весьма общим. Он используется как при решении обратных задач, так и при разработке алгоритмов решения нелинейных задач прямого моделирования [23, 73].

На рис. 4.30, а, б представлены точные и «возмущенные» входные данные первой из обратных задач в сравнении с теми значениями, которые соответствуют уже восстановленному по таким данным кинетическому коэффициенту. Найденная зависимость  $\beta = \beta(C)$  в сравнении с точным коэффициентом представлена на рис. 4.31.

Входные данные для второй задачи при возмущении на уровне 1 % представлены на рис. 4.32 при аналогичных обозначениях. Соответствующий этому результату восстановления кинетического коэффициента изображен на рис. 4.33.

Из этих наблюдений можно заключить, что 10 %-ная ошибка измерений не позволяет восстановить характерное поведение  $\beta(C)$ , по крайней мере всюду в области; однако погрешность 1 % вполне приемлема для решения задачи (по этой причине на рис. 4.31, 4.32 представлены данные, соответствующие только 1 %). Решение задачи об определении  $\beta(C)$  по заданному в конечный момент профилю концентрации при тех же аппроксимационных параметрах получается с меньшей точностью. Для получения той же точности следует взять неравномерную сетку измерений, сгущающуюся по направлению к поверхности ( $x = 0$ ). Вместе с тем, как отмечается в гл. 6, имеются случаи, когда и 10 %-ная ошибка вполне допустима.

### ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

---

В отличие от предшествующих задач, относящихся главным образом к формированию и постановке моделей или оптимизации функционирующих (на ЗИЛе) технологических процессов, в настоящей главе рассмотрены задачи, возникшие при разработке некоторых новых технологий.

Задачей математического моделирования в этом случае является прогнозирование результата разработок, своего рода проверка эффективности первоначальной инженерно-технической идеи, положенной в основу разработки.

Эту задачу решают двумя путями: применением метода обратных задач, в частности оптимизационных постановок, и метода прямого моделирования.

#### 5.1. ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВНУТРЕННЕГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗАГОТОВКИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗЦА

##### 5.1.1. Содержание задачи и ее связь с производственным циклом

Проблема повышения эффективности производства выдвигает в качестве одной из центральных задач экономии энергии в технологических циклах. Резервы такой экономии заложены, в частности, в рациональной организации единого технологического процесса, исключающей потери при переходе от одного его этапа к другому. В частности, при термической обработке образцов, получаемых предварительно литьем, возможна экономия за счет более полного использования их первоначальной энтальпии в стадии нагрева для последующей термомеханической обработки.

Наряду с задачами организации транспортирования образцов, обеспечения теплоизоляции и т. д., для решения названной проблемы необходимо организовать контроль внутреннего термического состояния заготовок.

Один из возможных путей для этого — прямое математическое моделирование процесса остывания заготовки в целом в реальных условиях транспортирования до поступления ее на тот или иной

этап термической обработки (прокатку, закалку и т. п.). Такое моделирование означает решение задачи Стефана [9] в достаточно сложных и переменных во времени условиях теплообмена с окружающей средой. Это сложная математическая задача, плохо адаптируемая к изменению внешних условий.

Наличие неразрушающих средств контроля температурного состояния поверхности образца или перспективы развития этих средств делают возможным другой путь, связанный с постановкой и решением в реальном времени некоторой обратной задачи. Это задача о расчете внутреннего температурного поля по данным о температурах поверхности образца, которая при соответствующем техническом обеспечении может решаться в реальном времени для любого заданного ограниченного временного отрезка. Если на таком отрезке  $[\tau_0, \tau_2]$  условия теплообмена с внешней средой неизменны, то оказывается, что по данным о температуре поверхности на меньшем отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$ ,  $\tau_1 < \tau_2$  можно найти начальное (в момент  $\tau_0$ ) распределение температуры внутри образца, а затем продолжить его прямым моделированием на весь промежуток  $[\tau_0, \tau_1]$ .

Выше отмечена одна из возможностей использования такого подхода, связанная с генеральным направлением организации производства. Разумеется, однако, что подобная обратная задача может представлять интерес и как средство контроля термического состояния образцов на отдельных этапах высокотемпературной обработки. В этом случае контролирующая ЭВМ как бы дополняет измерительное устройство, расширяя его возможности.

### 5.1.2. Математическая постановка задачи и регуляризация ее решения

Ограничимся рассмотрением задачи для цилиндрических образцов и аксиально-симметричного температурного поля. Постановка задачи для любой другой ситуации лишь в деталях отличается от приводимой ниже.

В рассматриваемом случае температура  $t = t(r, z, \varphi)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = C(t) \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

$$0 > r < R, \quad 0 < z < l, \quad \varphi > 0; \quad (5.1)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = F(t), \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=l} = F(t),$$

$$t \Big|_{r=R} = \bar{t}(R, z, \varphi).$$

Здесь предполагается известным и идентичным на всех участках границы закон теплоотдачи  $F(t)$ , зависящий явно только от тем-

пературы  $t$ . Эта формула включает, например, конвективный теплообмен по закону Ньютона, а также теплообмен излучением по закону Стефана—Больцмана. Функция  $f(R, z, \tau)$  известна из эксперимента при  $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$ .

Для определения температуры в любой момент времени  $\tau > \tau_0$  достаточно знать начальное распределение, которое обозначим

$$t|_{\tau=0} = \varphi(r, z). \quad (5.2)$$

Заменяя последнее из условий (5.1) условием (5.2), можно получить задачу прямого моделирования, из которой с помощью, например, конечно-разностных методов можно найти температурное поле всюду (в том числе и на поверхности) при любом заданном  $\varphi$ . Обозначим результат использования соответствующих алгоритмов, разрешающих прямую задачу вплоть до определения температуры поверхности, через  $t[r, z, \tau, \varphi]$ , где  $\tau > \tau_0$ .

Учитывая алгоритмическую определенность внутреннего температурного поля при заданном  $\varphi$ , поставим обратную задачу как задачу об определении  $\varphi(r, z)$  по заданной функции  $f(R, z, \tau)$ .

Единственность решения такой задачи при точных входных данных установлена в работах [12, 13] для линейной модели (5.1) и некоторых других, когда теплофизические характеристики  $\lambda, C, \gamma$  не зависят от температуры, а теплообмен на поверхности подчиняется закону Ньютона. Показано также, что достаточной для определения единственной функции  $\varphi(r, z)$  является информация о температуре поверхности, получаемая датчиком, движущимся по заданному закону по некоторой кривой на поверхности. Эти результаты дают ориентировку в выборе минимальной информации о температуре поверхности, достаточной для решения обратной задачи.

Обратная задача неустойчива относительно погрешностей входной информации, и ее регуляризованное решение (см. гл. 1) может быть найдено с помощью общего регуляризирующего оператора Тихонова. В данном случае в качестве условия отбора приближения естественно принять требование достаточной гладкости функции  $\varphi(r, z)$ , гарантируемой подходящим выбором стабилизирующего функционала  $\Omega(\varphi)$  (в частности,  $\Omega(\varphi) = \|\varphi\|_{W_2^2}^2$ , см. гл. 1).

В результате дело сводится к поиску функции  $\varphi^\alpha(r, z)$ , минимизирующей функционал

$$F_\alpha(\varphi) \equiv \int_0^l \int_0^{\tau_1} [t[R, z, \tau, \varphi] - f(R, z, \tau)]^2 dz d\tau + \alpha \Omega(\varphi). \quad (5.3)$$

Зависящее от параметра  $\alpha > 0$  приближение  $\varphi^\alpha(r, z)$  может быть выбрано по одному из критериев прерывания процесса спуска по параметру аналогично тому, как это делалось в описанных

выше обратных задач. Для минимизации функционала при каждом  $\alpha$  можно использовать известные аппроксимации и методы.

Следует иметь в виду, что решение такой обратной задачи для двумерного нелинейного процесса теплопроводности предполагает использование достаточно мощной вычислительной техники. В этой связи в упомянутых работах математический эксперимент проводится для несколько упрощенных моделей.

### 5.1.3. Результаты математического эксперимента

Поскольку весь комплекс вычислений, связанных с решением обратной задачи, может быть поручен электронной вычислительной машине, на первый план выступает основной для практического использования вопрос: с какой точностью следует проводить измерения температуры поверхности, для того чтобы начальный профиль, а следовательно, и прогнозируемое температурное поле внутри заготовки могли бы быть восстановлены с удовлетворительной точностью.

Именно с этой целью и проводят математический эксперимент на подходящих моделях. Его организация совершенно стандартна [23]: а) по заранее заданному начальному профилю с помощью решения на ЭВМ задачи (5.1) рассчитывается температурное поле на некоторой сетке точек поверхности; б) в полученные значения вносится ошибка контролируемого уровня, имитирующая погрешности измерений; в) по такой неточной входной информации решается обратная задача; г) результат ее решения сравнивается (автоматически или визуально) с известным точным решением и тем самым оценивается погрешность полученного приближения.

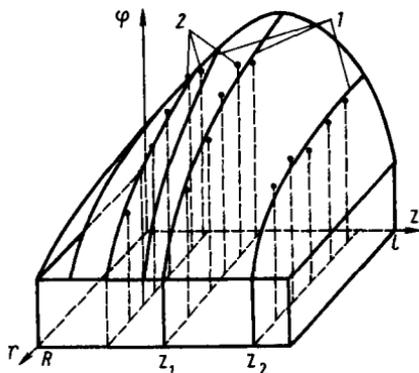
В работах [12, 13] такой эксперимент проводился для линейных моделей процесса: двумерной А и одномерной Б ( $t = t(r, z)$ ) при конвективном законе теплообмена  $F(t) = Ht$  на поверхности образца.

Для модели А в целях упрощения расчета начальное распределение было подчинено граничному условию  $\varphi(R, z) = \varphi(r, 0) = \varphi(r, l) = \text{const}$ . В этом случае в качестве условного стабилизатора может служить функционал сравнительно простой структуры

$$\Omega(\varphi) = \int_0^R \int_0^l \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \right)^2 dr dz, \quad (5.4)$$

Рис. 5.1. Начальная температура конечного цилиндра:

1 — заданная температура; 2 — рассчитанные значения



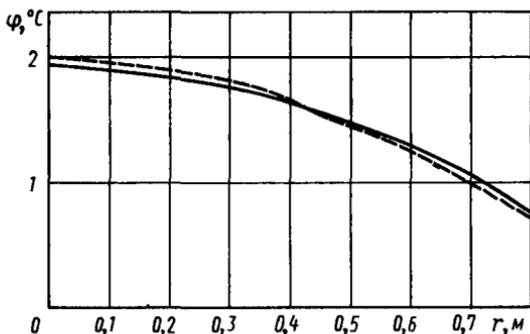


Рис. 5.2. Начальная температура «бесконечного» цилиндра:  
 — заданная;  
 - - - расчетная

который и выбирается в работе [13]. Для модели Б также используется условный стабилизатор  $\int_0^R (\partial\varphi/\partial r)^2 dr$  на множестве функций, удовлетворяющих граничному условию  $\varphi(R) = 0$ .

Прерывание процесса спуска по параметру  $\alpha$  при минимизации сглаживающего функционала в [13] осуществляется на основе квазиоптимального критерия (см. гл. 1).

Приведенные иллюстрации (рис. 5.1, 5.2) относятся к восстановлению начальных распределений:  $\varphi(r, z) = 3 + 7 \cos \frac{\pi}{2R} r \sin \frac{\pi}{l} z$  для модели А и  $\varphi(r) = 2(R^2 - r^2)$  для модели Б, а также следующим значениям параметров образца:  $\alpha^2 = \lambda/(C\gamma) = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varphi_0 = 3,4 \text{ с}$ ,  $\varphi_1 = 4 \text{ с}$ ,  $\dot{H} = 1,88 \text{ Дж/м}^3 \times \text{с} \cdot \text{°C}$ ,  $R = l = 0,3 \text{ м}$  для модели А и  $\dot{H} = 0,98 \text{ Дж/(м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{°C)}$ ,  $R = 0,84 \text{ м}$  для модели Б.

Результаты математического эксперимента показали, что для получения начального профиля с погрешностью, не превышающей 5—10 %, температуру поверхности достаточно измерять с относительной погрешностью не более 5 %. Таким образом, рассмотренная перспектива контроля внутреннего термического состояния заготовки оказывается вполне реальной.

## 5.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРЕВА БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ

### 5.2.1. Целевая постановка задачи математического моделирования

Использование порошковых материалов для изготовления разнообразных деталей, поверхность которых подвергается быстрому износу в процессе эксплуатации, является весьма перспективным направлением. Технология их изготовления предполагает нанесение на поверхность компактной основы слоя из порошкового материала, обеспечивающего нужные качества изделия, например

инструмента из быстрорежущей конструкционной стали. При этом наружный слой после прокатки в обойме (в стальной оболочке) благодаря взаимной диффузии столь прочно сцепляется с основой, что вся заготовка представляет собой монолит, но с различными физическими свойствами в слоях. Такую заготовку будем называть биметаллической.

Биметаллическая заготовка подвергается затем высокотемпературному нагреву для последующей штамповки или термической обработке, и режим нагрева должен быть таким, чтобы возникающие при этом термоупругие поля ее не разрушили. Возможность устойчивого нагрева предположительно следует из того, что подбором материалов основы и порошкового можно обеспечить достаточно быстрое выравнивание температуры по радиусу в пределах порошкового слоя, если нагрев проводится индукционным способом, т. е. является поверхностным. В этом случае, как отмечено в гл. 3, активному нагреву распределенными токами Фуко подвергается тонкий приповерхностный слой, тогда как более глубокие слои нагреваются за счет теплопроводности. Поэтому представляется достаточным выбрать материалы таким образом, чтобы их плотность, теплоемкость и упругие характеристики оказались близкими, а теплопроводность основы была бы существенно выше теплопроводности порошкового слоя по крайней мере на начальной стадии процесса нагрева.

То, что в точке Кюри интенсивность активных источников нагрева падает за счет резкого изменения магнитной проницаемости материалов, можно компенсировать увеличением частоты индукционного тока.

Прогнозируемая равномерность прогрева важна и для технологии последующей штамповки детали, однако, соответствующий эффект требует экспериментальной проверки, а также количественных оценок параметров режима нагрева. Для этих целей и предназначается в данном случае численный эксперимент на ЭВМ как составная часть математического моделирования процесса индукционного нагрева биметаллической заготовки. Успех такого эксперимента послужил бы основанием для развития новой производственной технологии и свел бы к минимуму сопутствующее физическое экспериментирование, связанное с ощутимыми материальными и временными затратами.

### **5.2.2. Математическая модель процесса индукционного нагрева**

Ответ на поставленные вопросы может быть получен путем прямого моделирования процесса при условии, что все физические параметры модели и тип управляющих параметров режима заданы заранее, на что и будем опираться в дальнейшем. Вместе с тем развиваемая математическая постановка задачи расширяет модель, предложенную для закалки, в следующих отношениях: а) про-

цесс рассчитывается в пространственно неоднородной среде; б) теплообмен на поверхности образца включает излучение по закону Стефана—Больцмана ввиду необходимости более точного учета всех факторов, влияющих на температурное поле; в) эффект контролируется не только на основе априорных оценок допустимого перепада температуры по сечению образца, при котором не должно быть перенапряжений ( $\Delta t \leq 50^\circ\text{C}$ ), но и посредством прямого дополнительного расчета термоупругих напряжений при нагреве до точки Кюри.

Эффект может быть оценен в рамках модели бесконечно протяженного цилиндрического образца, нагреваемого в коаксиальном с ним колленоидальном индукторе. Такая модель геометрической конфигурации упрощает расчет, позволяя учесть тем не менее основные факторы, определяющие результат нагрева.

Как и в других рассмотренных выше задачах, высокотемпературный нагрев описывается нелинейной системой уравнений теплопроводности и электродинамики.

В соответствии с принятыми ограничениями математическая модель процесса нагрева биметалла формулируется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_s(t) \frac{\partial t_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \rho_s(t) \left| \frac{\partial H_s}{\partial r} \right|^2 = c_s(t) \gamma_s(t) \frac{\partial t_s}{\partial \tau}, \quad (5.5)$$

$$0 < r < R_2, \quad 0 < \tau < \hat{\tau},$$

$$t_s|_{\tau=0} = t^0, \quad \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$t_1|_{r=R_1} = t_2|_{r=R_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1},$$

$$-\lambda_2(t) \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \tilde{h} (t_2 - t^0)|_{r=R_2} + \hat{\sigma} \hat{\chi} [t_2^4 - (t_k^*)^4] \Big|_{r=R_2},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_s(t) \frac{\partial H_s}{\partial r} \right) + i \omega \mu_s(t) H_s = \frac{\partial}{\partial \tau} (\mu_s(t) H_s),$$

$$H_s|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$H_1|_{r=R_1} = H_2|_{r=R_1}, \quad \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (5.6)$$

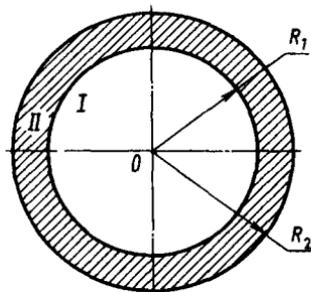
$$H|_{r=R_2} = n \tilde{I}.$$

Здесь индексы в  $s$  1 или 2 соответствуют характеристикам металла I или II (рис. 5.3);  $\omega = 2\pi f$ ;  $\lambda$  — теплопроводность, Вт/(м·°C);  $c$  — теплоемкость, Дж/кг·°C;  $\gamma$  — плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho$  — удельное сопротивление материала, Ом·см (все эти величины являются функциями температуры);  $\tilde{h}$  — коэффициент теплоотдачи с поверхности при конвективном теплообмене, Вт/м<sup>2</sup>·°C;  $\hat{\sigma} = 5,67 \times 10^{-8}$  Вт/м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup> — постоянная Стефана—Больцмана;  $\hat{\chi} = 0,8$  — степень черноты;  $n$  — число витков индуктора на единицу его длины, 1/мм,  $\tilde{I}$  — переменная амплитуда квазигармонического тока в индукторе.

Рис. 5.3. Сечение биметаллического образца

В соответствии с априорными соображениями качественного характера будем рассматривать режим нагрева, при котором частота  $f$  мгновенно возрастает от значения  $f_1$  до  $f_2$  в момент  $t_*$  перехода температуры поверхности  $t(R_2, \varphi)$  через точку Кюри ( $t_{\text{Кюри}}^{\text{II}}$ );

$$f = \begin{cases} f_1, & t(R_2, \varphi) < t_{\text{Кюри}}^{\text{II}}; \\ f_2, & t(R_2, \varphi) \geq t_{\text{Кюри}}^{\text{II}}. \end{cases} \quad (5.7)$$



Для расчета температурного поля из условий поставленной задачи при любых теплофизических характеристиках и любой управляющей функции  $\tilde{I}(\varphi)$  можно использовать совокупность итерационно-разностных алгоритмов, охарактеризованных в предшествующих главах. Отличие состоит лишь в том, что ввиду нелинейности граничного условия при расчете очередного приближения  $t^{(p)}$  температурного поля на каждом временном слое добавляется внутренний итерационный цикл. Начальным для него служит краевое значение температуры на предшествующем временном слое. Таким образом, температуру биметалла можно считать алгоритмически определенной, а исполняющую ЭВМ-программу можно считать датчиком температурного поля.

### 5.2.3. Математический эксперимент на ЭВМ и его результаты

Для проведения математического эксперимента были выбраны следующие материалы (см. рис. 5.3): углеродистая сталь У8 в качестве основы (I) и быстрорежущая сталь Р18 в качестве порошкового слоя (II). Температурные зависимости параметров этих материалов, представленные на рис. 5.4—5.9 [16, 28, 93], удовлетворяют априорным требованиям к ним. В частности, коэффициенты теплопроводности различаются при начальной температуре примерно вдвое. С повышением температуры теплопроводность основы падает, а теплопроводность порошкового слоя незначительно возрастает, оставаясь в среднем неизменной. В районе и выше точки Кюри теплопроводности обоих материалов оказываются столь же близкими, как и другие их параметры. Предполагается, что к моменту достижения точки Кюри влияние биметаллической структуры в выравнивании температур в основном закончилось, что подтверждается последующим математическим экспериментом.

В результате математического эксперимента управляющие параметры должны быть подобраны таким образом, чтобы в заданном диапазоне изменения геометрических характеристик

$c, \text{мДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$

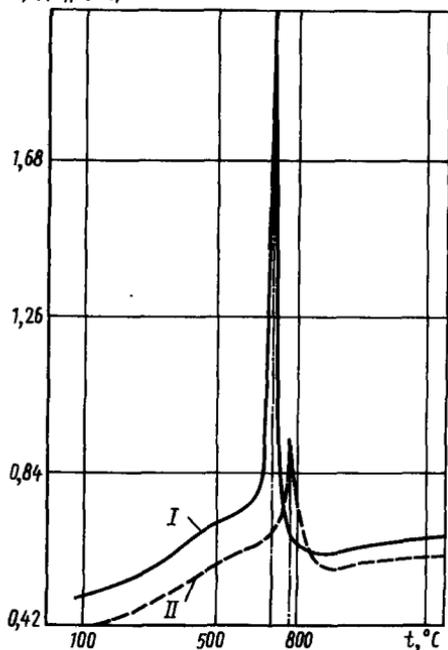


Рис. 5.4. Удельная теплоемкость слоев образца:

— — — — —  $c_{\text{Кюрн}}^I = 730^\circ\text{C}$ ; — — — — —  
 $c_{\text{Кюрн}}^{II} = 780^\circ\text{C}$

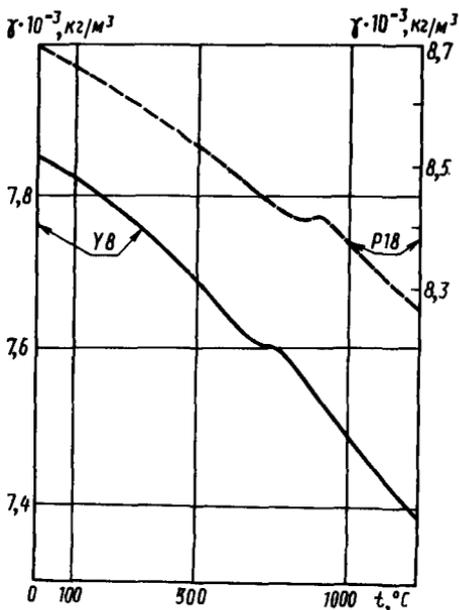


Рис. 5.5. Плотность слоев образца

$\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$

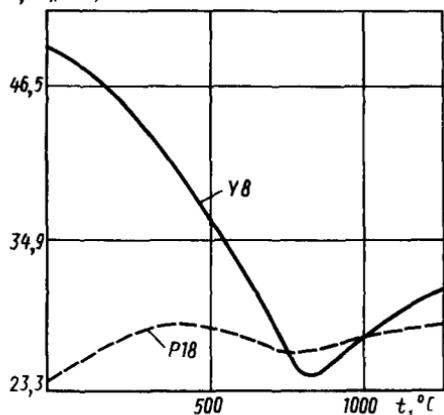


Рис. 5.6. Теплопроводность слоев образца

$\rho \cdot 10^8, \text{Ом} \cdot \text{м}$

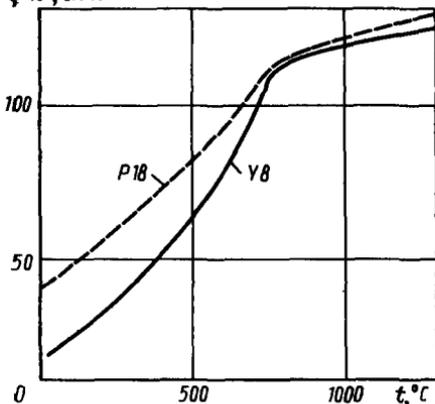


Рис. 5.7. Электрическое сопротивление слоев образца

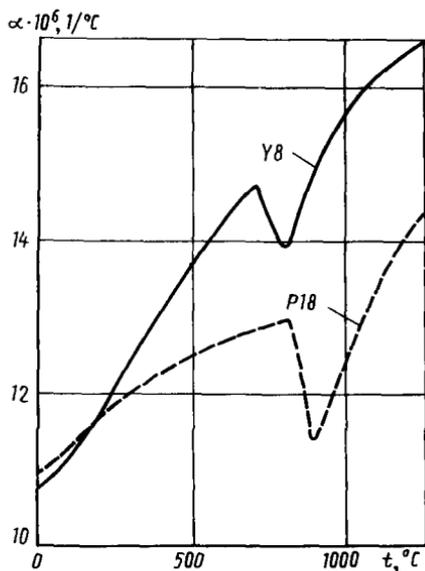


Рис. 5.8. Коэффициент линейного расширения слоев образца

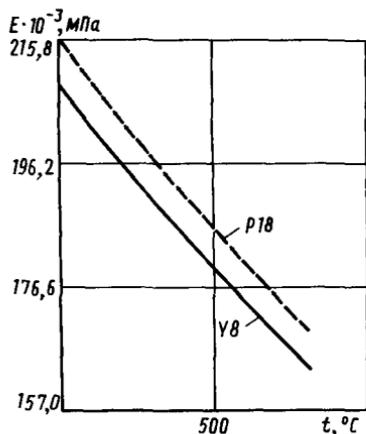


Рис. 5.9. Модуль Юнга для материалов слоев образца

$\{R_1, R_2\}$  и для заданной продолжительности процесса были выполнены следующие условия: а) падение температуры между границей раздела двух компонент и поверхностью биметаллического образца не превосходило  $50^\circ$  в течение нагрева; б) в конце нагрева температура при распределении по радиусу, близкому к равномерному в пределах указанного допуска, достигала требуемого уровня:  $\bar{t} = 1200 \div 1300^\circ\text{C}$ .

Поскольку речь идет о непрерывном повышении температуры, простейший вариант управления процессом — это поддержание амплитуды тока на том или ином постоянном уровне  $I_0$ .

Проверка такой возможности с соблюдением указанных целевых требований была проведена для монометаллического образца сопоставлением результатов расчета и физического эксперимента на ПО ЗИЛ. Соответствующая модель получается из условий (5.5) и (5.6) простой подстановкой параметров. Расхождение в температурных полях, рассчитываемых и измеряемых, не превысило  $25^\circ$ , а в продолжительности нагрева до нужного уровня  $\sim 10$  с при общем времени нагрева  $\sim 5$  мин.

В ходе математического эксперимента над биметаллическим образцом удалось прокорректировать предложенную модель и в другом отношении. Оказалось, что варьирование коэффициента конвективного теплообмена  $\bar{h}$  в разумных (по технологическим оценкам) пределах оказывают какое-либо влияние лишь на начальной стадии нагрева (до и несколько выше точки Кюри). К тому же оно столь незначительно, что конвективным теплообменом и на

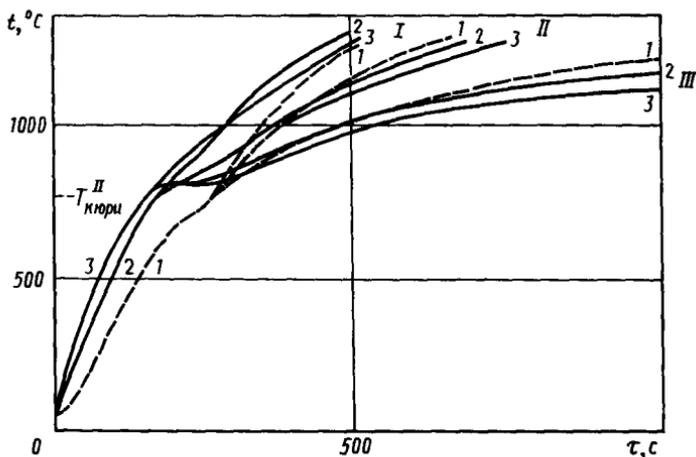


Рис. 5.10. Температурные кривые при различных значениях  $f_2$ :  
 I — 2500 Гц; II — 1000 Гц; III — 500 Гц

этой стадии можно пренебречь, положив  $\dot{h} = 0$ , так что теплоотдача с поверхности определяется исключительно законом излучения, действующим эффективно лишь при достаточно высоких температурах.

Проведенный эксперимент подтвердил качественный прогноз относительно возможности квазиравномерного нагрева биметаллического образца до заданного уровня и позволил обнаружить ряд закономерностей, включая оценки соответствующих эффектов.

Такие оценки здесь проведены для образцов радиусом 25 — 50 мм при  $\Delta R = R_2 - R_1 \approx 5-10$  мм.

Установлено, что с увеличением частоты  $f_1$  на первой стадии приблизительно в 5 раз ее продолжительность при условии квазиравномерности может возрасти примерно в 2,5 раза. Отметим, что соблюдение условия квазиоптимальности означает одновременное с указанным увеличением частоты уменьшение силы тока  $I_0$  примерно вдвое и увеличение частоты тока на второй стадии примерно в 8 раз.

Общее время нагрева до требуемого уровня температуры уменьшается примерно вдвое при увеличении силы индуцирующего тока примерно в 1,5 раза. Аналогичное сокращение общего времени квазиравномерного нагрева наблюдается при увеличении частоты тока на второй стадии примерно в 5 раз.

На рис. 5.10 характерное поведение температурных кривых на поверхности ( $r = R_2$ ) образца (кривая 3), на границе раздела ( $r = R_1$ ) компонент (кривая 2) и на оси (кривая 1) представлено для параметров:  $R_1 = 40$  мм,  $R_2 = 50$  мм,  $f_1 = 50$  Гц и различных значений  $f_2$  при оптимальной в указанном выше смысле величине  $I$ .

Напрашивается вывод о том, что если оценка падения температур может быть принята в качестве достаточного критерия эффективности технологического процесса, то при отсутствии существенных технологических ограничений на величину силы тока  $I_0$  целесообразно пользоваться током промышленной частоты:  $f_1 = 50$  Гц на первой стадии и  $f_2 = 2500$  Гц на второй.

#### 5.2.4. Математическая модель и расчет поля термоупругих напряжений в биметалле

Расчет поля напряжений в образце служит для контроля выводов, полученных на основе чисто термического критерия. При достаточно высоких температурах в образце наряду с упругими возникают пластические деформации и связанные с ними напряжения. Однако для расчета последних требуется знать предел упругости и поверхность нагружения для рассматриваемых конкретных материалов. Поскольку такая информация отсутствует в литературе, ее получение требует либо постановка прямого физического эксперимента, либо постановки и решения соответствующих обратных задач. Последнее возможно, однако, есть основание полагать, что наибольшую опасность представляют напряжения, возникающие на начальной стадии процесса, когда градиенты температуры и скорости ее изменения выше, чем впоследствии. На этой стадии, т. е. до точки Кюри, термические напряжения остаются еще упругими.

В малой окрестности любого фиксированного момента времени  $\psi^*$ ,  $\psi > \psi^*$  термоупругие напряжения могут быть рассчитаны в квазистатическом приближении. Это значит, что расчет может быть проведен без учета обратного влияния деформаций на температурное поле и вслед за расчетом последнего. В этом случае полученное ранее температурное поле в момент  $\psi^*$  рассматривается как функция только радиуса и служит параметром для статических уравнений теории упругости.

Принимая во внимание аксиальную симметрию температурного поля как источника деформаций, запишем вектор смещения в цилиндрических координатах [48, 59]  $\vec{u}^{(s)} = \{u_r^{(s)}(r), u_\varphi^{(s)} = 0, u_z^{(s)}(z) = v\}$ , где  $v = \text{const}$ . Индекс  $s$ , принимающий значения 1 и 2, соответствует тому или другому слою биметалла (см. рис. 5.3). Тогда тензор деформации для любого слоя описывается следующими тремя функциями:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = v. \quad (5.8)$$

Соответственно тензор напряжений (также для любого слоя)  $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}\}$  описывается формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{rr} + \nu(u_{\varphi\varphi} + u_{zz})] - g; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{\varphi\varphi} + \nu(u_{zz} + u_{rr})] - g; \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{zz} + \nu(u_{rr} + u_{\varphi\varphi})] - g; \\ g &= \frac{E}{1-2\nu} \alpha t.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Эти уравнения состояния дополняются уравнениями упругого равновесия среды, находящейся под действием внешних сил, вызванных термическим расширением элементов:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(r u_r^{(s)})}{dr} \right) = \alpha_s \frac{1 + \nu_s}{1 - \nu_s} \frac{\partial t^{(s)}}{\partial r}, \quad (5.10)$$

$$s = 1, 2;$$

$$\left. \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad u_r^{(1)}|_{r=R_1} = u_r^{(2)}|_{r=R_1}, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_1} &= \sigma_{rr}^{(2)}|_{r=R_1}, \quad \sigma_{rr}^{(2)}|_{r=R_2} = 0; \\ \int_0^{R_1} \sigma_{zz}^{(1)} r dr + \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zz}^{(2)} r dr &= 0.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Последнее из этих уравнений означает, что равнодействующая осевых сил равна нулю, а это, в приближении плоской модели, соответствует свободным от внешнего воздействия торцам [59].

В приведенных здесь уравнениях  $E = E_s$  обозначает модуль упругости,  $\nu = \nu_s$  — коэффициент Пуассона и  $\alpha = \alpha_s$  — коэффициент линейного расширения для каждой из двух сред. Зависимости  $E_s$  и  $\alpha_s$  от температуры представлены на рис. 5.8, 5.9; коэффициенты Пуассона приняты равными:  $\nu_1 = 0,35$ ,  $\nu_2 = 0,25$  [59].

Задача (5.8)—(5.12) допускает аналитическое решение относительно поля напряжений, деформаций или смещений. В данном случае интерес представляет поле напряжений, компоненты которого выражаются явным образом после того, как неопределенные константы, получающиеся при интегрировании системы уравнений равновесия, оказываются определенными с помощью граничных условий и интегрального соотношения, определяющего  $u_{zz} \equiv v$ .

Соответствующие, достаточно громоздкие расчетные формулы могут быть представлены в следующем виде, отражающем схему автономной ЭВМ-процедуры:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(s)} &= \frac{E_s}{1-2\nu_s} \left[ -\frac{1}{r^s} S_s + F_s \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(s)} &= \frac{E_s}{1-2\nu_s} \left[ \frac{1}{r^s} S_s + F_s \right] - \frac{E_s}{1-\nu_s} \alpha_s t^{(s)}(r); \\ \sigma_{zz}^{(s)} &= \frac{E_s}{1-2\nu_s} Q_s - \frac{E_s}{1-\nu_s} \alpha_s t^{(s)}(r).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Здесь введены обозначения:

$$S_2 = (k_2 - 1) \left( \frac{\alpha_2}{k_2} \int_{r_2^*}^r \rho f(\rho) d\rho + P_2 \right) \quad (r_1^* = 0, \quad r_2^* = R_1);$$

$$P_1 = 0, \quad P_2 = \frac{\Psi}{\beta} \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^{R_1} \rho f(\rho) d\rho + \frac{R_1^2}{k_2 + 2} \frac{C_1 - C_2}{2};$$

$$P_3 = \frac{1}{k_2 + 2} \left( C_2 \frac{1}{2\nu_2} + \nu \right); \quad (5.14)$$

$$Q_2 = \frac{1}{k_2 + 2} (C_2 + k_2 \nu);$$

$$\Psi = \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2}, \quad \beta = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad k_2 = \frac{1}{\nu_2} - 1.$$

Константы  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\nu$  выражаются формулами

$$\nu = \frac{\xi_{21} - \xi_{21}}{\chi_{21} - \chi_{21}}; \quad C_2 = \xi_{21} - \nu \chi_{21}; \quad C_1 = (\vartheta_1 - C_2 b_1 - \nu d_1) / a_1, \quad (5.15)$$

в которых использованы следующие обозначения:

$$\xi_{21} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1 \frac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}}; \quad \chi_{21} = \frac{d_2 - d_1 \frac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}};$$

$$\xi_{21} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1 \frac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}}; \quad \chi_{21} = \frac{d_2 - d_1 \frac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}};$$

$$a_1 = \frac{s}{1 - 2\nu_1} + \psi; \quad b_1 = -2\psi \frac{k_2}{k_2 - 1}; \quad d_1 = 2 \frac{\varepsilon \omega - \psi}{k_2 - 1};$$

$$a_2 = -1; \quad b_2 = 1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu_2}; \quad d_2 = 2 \frac{\nu}{k_2 - 1};$$

$$a_3 = \frac{l\omega}{\beta}; \quad b_3 = \frac{\psi}{\beta}; \quad d_3 = k_1 \frac{l\omega}{\beta} + k_2 \frac{\psi}{\beta};$$

$$\nu = \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2; \quad s = \frac{E_1}{E_2}; \quad l = \frac{s}{\nu - 1}; \quad \omega = \frac{k_2 - 1}{k_1 - 1};$$

$$\vartheta_1 = \frac{2}{R_1^2} (k_1 + 2) \left[ (s - \psi) \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^{R_1} \rho f(\rho) d\rho \right];$$

$$\vartheta_2 = \frac{2}{R_1^2} (k_2 + 2) \left[ \frac{\psi}{\beta} \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^{R_1} \rho f(\rho) d\rho + \frac{\alpha_2}{k_2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho \right];$$

$$\vartheta_3 = \frac{2}{R_1^2} (k_1 + 2) (k_2 + 2) \left[ \frac{l}{\beta} \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^{R_1} \rho f(\rho) d\rho + \frac{l}{\nu - 1} \frac{\alpha_2}{k_2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho \right].$$

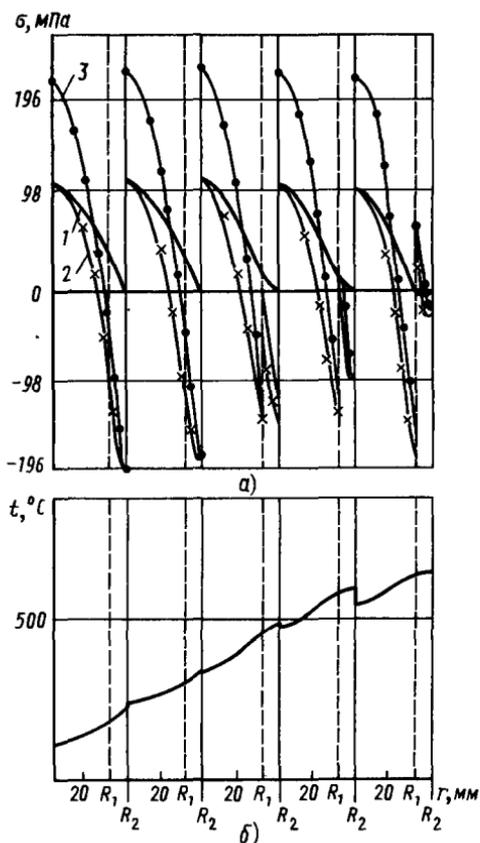


Рис. 5.11. Зависимость упругих напряжений и температуры от радиуса образца в различные моменты времени при оптимальном режиме нагрева:

1 —  $\sigma_{rr}$ ; 2 —  $\sigma_{\phi\phi}$ ; 3 —  $\sigma_{zz}$

Отметим, что указанные ниже результаты получены при осредняющем приближении зависимости  $E_s$  и  $\alpha_s$  от температуры. Именно эти величины рассматриваются как функции средней температуры  $t_{ср}^{(s)}$  в каждом слое, причем  $t_{ср}^{(1)} = \frac{1}{2}(t(R_1) + t(0))$ ,  $t_{ср}^{(2)} = \frac{1}{2}(t(R_2) + t(R_1))$  в каждый рассматриваемый момент времени.

Анализ результатов математического эксперимента по определению напряжений свидетельствует о том, что перепад напряжений в интересующей области в самом деле коррелирует с перепадом температуры, так что с возвра-

щением последнего, т. е. с ростом скорости нагрева поверхности, растет и перепад напряжений.

На рис. 5.11, а, б распределение компонент тензора напряжений по радиусу представлено для различных моментов времени, наряду с распределением температуры, для технологических параметров, соответствующих приведенной выше иллюстрации оценки чисто термического эффекта (см. рис. 5.10).

Видно, что перепад напряжений в интересующей области не превосходит допустимых значений, что подтверждает прогноз, основанный на оценке чисто термического эффекта.

### 5.2.5. Возможности постановки задачи оперативного управления технологическим процессом

Результаты математического эксперимента над температурным полем свидетельствует о том, что существует некоторое множество режимов управления нагревом биметалла, при котором достигается ожидаемый эффект.

Ему соответствуют различные комбинации управляющих параметров, в том числе различная продолжительность нагрева. Это позволяет ставить задачу оптимального управления технологическим процессом, предметом которой явилось бы максимальное сокращение его продолжительности без потери качества результата и с учетом соответствующих технических ограничений на все параметры.

Для решения такой задачи в оперативном режиме управления ее необходимо формулировать аналогично задаче, поставленной в гл. 2, а именно: если  $\vec{p} = \{I_0, f_1, f_2\}$  — набор управляющих параметров, то его искомое значение  $\vec{p}_{\text{опт}}$  определяется решением вариационной задачи, где целевым функционалом является продолжительность времени нагрева  $\hat{t}$ . Оптимальное значение  $\hat{t}$  определяется, например, условием  $\|t(p) - \hat{t}\| \equiv \max_{0 \leq r \leq R_s} |t[r, \hat{t}, \vec{p}] - \hat{t}| = \delta$ . Здесь  $t[r, \hat{t}, \vec{p}]$  — распределение температуры по радиусу в конце нагрева, рассчитываемое при каждом наборе параметров из условий задачи (5.5), (5.6);  $\delta$  — заданный допуск на отклонение температуры от заданного уровня  $\hat{t}$ . Наконец, условия технической реализуемости оптимального решения учитываются тем, что в ходе минимизации значения управляющих параметров выбираются из заранее заданного множества. Математическое описание подобной задачи оптимизации и методики ее решения приведены в гл. 2, поэтому здесь на этих аспектах подробно не останавливаемся. Отметим лишь, что в случае необходимости функционал качества  $\|t[\vec{p}] - \hat{t}\|$  можно без изменения общей методики заменить другим, оценивающим, например интенсивность термоупругих или термопластических напряжений при заданном допуске на перепад интенсивности в критической области.

### 5.3. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПОРОШКОВОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

#### 5.3.1. Целевая постановка некоторых задач математического моделирования в области порошковой металлургии

Порошковая металлургия позволяет не только экономить металл, существенно снижать трудоемкость изготовления деталей, себестоимость продукции, но и создавать композиционные материалы с уникальным сочетанием свойств. Структурные особенности ультрадисперсного сочетания материалов дают возможность получать рекордные значения твердости и прочности материалов, переносить воздействия циклических колебаний температуры, напряжения и влияние других сильно действующих факторов. Соответствующая технология позволяет получать однородные

системы из составляющих, нерастворимых друг в друге или имеющих очень различные точки плавления материалов с регулируемой пористостью и т. д.

Технология получения заготовок для дальнейшего производства деталей из порошковых материалов включает три основные стадии: а) смещение порошков в некоторых пропорциях; б) обработка порошковой массы давлением (холодное или горячее прессование); в) спекание порошковых брикетов.

Прогрессивная технология предусматривает объединение двух последних стадий — горячего прессования и спекания. В этом случае нагрев часто проводится в квазистационарном режиме либо индукционным методом, либо прямым пропусканием электрического тока.

Поступающие для такой обработки порошковые системы характеризуются весьма неоднородным строением, разветвленной системой пор различной формы и других макро- и микродефектов. Назначение двух последних стадий — максимальное компактирование образцов.

Основной недостаток технологии в целом — недостаточная прочность порошковых изделий — связан с наличием остаточных пор. Борьбу с остаточной пористостью можно вести на всех стадиях технологического процесса, и с этим связаны различные задачи математического моделирования.

В настоящее время не существует строгой физической теории диспергированных твердых фаз, и тем самым состояние порошковых смесей на первой и в начале второй стадии процесса не может быть описано с помощью каких-либо динамических уравнений [55, 104]. С другой стороны, завершающая обработка давлением и спекание порошковых брикетов по самой целевой постановке связана с уменьшением объема пор в достаточно сложных физических процессах, а тем самым с динамическим изменением физических параметров материала. Все это затрудняет адекватное природе вещей математическое моделирование процессов порошковой металлургии.

Существующие попытки создания теории горячего прессования, основанные на обобщении гидродинамических уравнений, уравнений упругопластического состояния сред с учетом нелинейных эффектов теплопроводности, наталкиваются при практическом применении в незнание параметров, определяющих основные закономерности для конкретного материала, получаемых обычно при физическом эксперименте.

Для определения физических характеристик пористых материалов мог бы быть применен метод обратных задач, когда искомые параметры восстанавливаются по данным косвенных измерений. Однако постановка таких задач предполагает возможность описать причиненные связи между наблюдаемой величиной и изучаемым объектом с помощью динамических уравнений, а именно это, как отмечено выше, в данном случае затруднительно.

В этой связи соответствующие процессы естественно рассматривать в рамках феноменологических моделей, использующих некоторые осредненные физические характеристики пористой среды для тех материалов и тех этапов различных стадий технологии, когда такие характеристики известны из прямого физического эксперимента или могут быть рассчитаны по его данным. Другим аспектом моделирования является отказ от динамического подхода и использования статистических описаний [29].

Не останавливаясь на перспективах разработки теории диспергированных сред и постановки соответствующих обратных задач, будем рассматривать некоторые задачи прогнозирования в рамках только что упомянутых моделей для описания одной из двух стадий технологического процесса порошковой металлургии: начальной, когда осуществляется смещение порошков в тех или иных пропорциях, и завершающей, связанной со спеканием порошковых брикетов. Целью математического моделирования, как и в предшествующих параграфах, остается априорная оценка результатов тех или иных технологических операций, т. е. прогнозирование технологического процесса.

### **5.3.2. Геометрический подход к решению задачи оптимизации гранулометрического состава порошковых смесей**

Одним из способов повышения эффективности технологического процесса в целом является уменьшение пористости на первой стадии при изготовлении порошковой смеси.

Если в первом приближении не учитывать физические факторы, то плотность укладки гранул зависит, вообще говоря, от трех геометрических факторов: формы частиц; их размеров; взаимного расположения в резервуаре.

В некоторых технологиях изготовления порошков форма гранул близка к сферической. Этим характеризуются, например, бронзовые и железные порошки, получаемые распылением. Если к тому же предположить, что гранулы могут располагаться (например, под действием вибраций) наиболее плотно, то остается единственный управляющий фактор — размеры частиц. Соответственно можно рассматривать задачу о зависимости пористости брикета от пропорции, в которых смешиваются частицы различных размеров.

В работах [51, 99] сделана попытка приближенно решать эту задачу на основе геометрического анализа ячейки смеси, состоящей из нескольких соприкасающихся шаров. В работе [51] показано, что если все шары имеют одинаковые размеры, то наименьшая пористость получается при так называемой плотной гексагональной их упаковке; такая упаковка называется также кубической и граицентрированной и характеризуется тем, что

в каждой кубической ячейке пространства центры шаров совпадают с вершинами куба и центрами граней куба.

Величина этой пористости оказывается равной  $1 - \pi/(3\sqrt{2}) \simeq \simeq 0,26$ . В работах [95, 96, 97, 103] показано, что использование шаров различных размеров способствует понижению пористости, а замена их на гранулы эллиптической формы мало влияет на величину пористости.

При использованном в упомянутых работах чисто геометрическом подходе предметом изучения являются различные возможности равномерного в пространстве взаимного расположения («упаковки») частиц сферической формы и расчет получающейся в каждом случае пористости. При этом за величину пористости принимается отношение  $\eta = (V_Q - V_r)/V_Q$ , где  $V_Q$  — «видимый» объем пористого брикета:  $V_r$  — суммарный объем гранул, формирующих данный пористый брикет.

Ввиду равномерности гипотетического распределения частиц задача сводится к расчету отдельной ячейки симметричной структуры.

Анализ упомянутых работ приводит к заключению, что в основу расчета ячейки могут быть положены два различных принципа: естественный принцип взаимного касания частиц различных размеров и принцип свободной фильтрации частиц меньших размеров между частицами больших размеров.

Согласно первому принципу частицы меньшего радиуса вписываются в свободное пространство между частицами большего радиуса, образуя правильную периодическую структуру попарно касающихся шаров. В оставшееся свободное пространство между частицами двух указанных радиусов вписываются частицы еще меньшего радиуса и т. д., каждый раз с соблюдением

### Б.1. Изменение плотности упаковки при добавлении второй компоненты в упаковки различного типа

Параметры упаковки	Тип основы							
	гранецетрированная		плотная гексагональная		плоская гексагональная		кубическая	
Число компонент	1	2	1	2	1	2	1	2
Плотность упаковки	0,74	0,79	0,74	0,75	0,61	0,78	0,52	0,73
Отношение радиусов	0,414		0,225		0,520		0,730	
Массовое отношение 2-й компоненты к 1-й	0,071		0,011		0,290		0,390	

## 5.2. Результаты расчета плотности многофракционной системы

Число фракций $n$	1	2	3	4	5
Отношение радиусов $r_2 : r_1$	1	0,414	0,225	0,177	0,155
Плотность	0,74	0,79	0,81	0,84	0,85

условий касания с возможно большим числом соседей. Радиусы частиц такой неоднородной смеси образуют убывающую последовательность значений [97, 99]. Соблюдение принципа свободной фильтрации частиц меньших размеров между частицами больших размеров предполагает, что частицы меньшего радиуса могут свободно проникать в поры между частицами более крупными. Это означает, что еще более мелкие частицы очередной группы фракции должны иметь (в рамках той же геометрической модели) радиус существенно меньший, чем радиус частиц предыдущей фракции. Смесь, получаемую на основе этого принципа, естественно назвать многофракционной.

Отправной для расчета (основой) может служить однофракционная конфигурация, одна и та же в обоих случаях. Можно заметить, что в такой конфигурации плотность упаковки не зависит от размеров частиц. Этот вывод интересен тем, что согласно ему в реальных условиях отклонения формы частиц от идеальной следует ожидать слабой зависимости плотности от вариации размеров частиц в сравнительно однородной смеси.

Плотность упаковки можно повысить за счет включения частиц фракций меньшего радиуса. Эффект такого включения зависит от того, каким принципом руководствоваться при выборе пропорций, в которых смешиваются компоненты.

В табл. 5.1 показан эффект добавления частиц второй фракции в упаковки различного типа при выборе размеров и соответственно пропорций согласно принципу касания.

Видно, во-первых, что добавление частиц всего одной фракции в нужной массовой пропорции сразу выводит плотность примерно на одинаковый уровень для всех типов упаковки. Отметим, что пропорции существенно зависят от типа основы, возможности управления которым не ясны.

Создав условия, при которых реализуется наименее выгодная конфигурация, оказывается, можно заметно повысить ее плотность добавлением одной фракции, в то время как плотность наиболее выгодной конфигурации повышается незначительно.

Во-вторых, принцип касания приводит к тому, что радиусы частиц смешиваемых фракций оказываются примерно одного порядка; минимальное значение  $r_2/r_1 \sim 0,25$ .

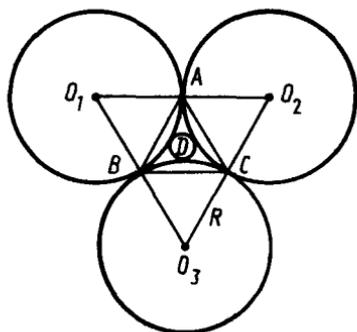


Рис. 5.12. Сечение трех касающихся шаров плоскостью, проходящей через три точки взаимного касания

В табл. 5.2 приведены результаты расчета плотности многокомпонентных смесей, образующихся по тому же принципу, на примере наиболее выгодной основной конфигурации (гранецентрированной).

Эти результаты были подтверждены экспериментом с шаро-

образными частицами, т. е. на моделях [21], и для системы с достаточно большим числом фракций радиусы их частиц остаются примерно одного порядка:  $r_6/r_1 \sim 1/6$ .

Заметно, что последовательное введение частиц все более мелких фракций на основе принципа касания повышает плотность упаковки достаточно медленно: для повышения ее на 10 % необходимо введение дополнительно четырех фракций с последовательно уменьшающимися размерами частиц. При этом существенно, что для реализации плотной упаковки такого типа необходимы: а) строгое соблюдение отношений радиусов и соответственно определенных массовых пропорций; б) применение внешних воздействий, обеспечивающих «насильственное» упорядочение в расположении частиц, ибо при засыпке они не должны располагаться оптимальным образом.

Представляется, что эти выводы, полученные на основе анализа смесей частиц правильной формы, относятся и к реальной ситуации, если основывать подбор пропорций на соответствующем принципе.

Таким образом, подбор пропорций на основе геометрического «принципа касаний» представляется практически малоэффективным для повышения плотности упаковки.

Оценим эффект подбора пропорций на основе принципа свободной фильтрации.

Рассмотрим для определенности наиболее выгодное распределение частиц основы радиуса  $R$  — так называемую гранецентрированную упаковку.

Размер пор между соприкасающимися шарообразными частицами основы оценивается геометрически (рис. 5.12).

Как можно рассчитать, радиус  $r_0$  круга, вписанного в треугольник  $O_1O_2O_3$ , равен  $R(\sqrt{3}/6) \simeq 0,289R$ ; высота  $h$  сегмента ADC равна  $R(1 - \cos 30^\circ) = R[1 - (\sqrt{3}/2)] \simeq 0,134R$ .

Следовательно, приближенная оценка радиуса круга, вписанного в криволинейный треугольник ABC, совпадает с оценкой размера поры  $r = (0,289 \div 0,134) R = 0,155R$ . Заметим, что эта величина совпадает с радиусом пятой фракции в смеси, рассчитанной на основе принципа касания.

Выберем радиус фракции  $r_1$  много меньшим величины  $0,155R$ . Этим обеспечивается свободное проникновение мелких частиц в поры между крупными. Более того, чем меньше выбранный относительный размер, тем больше оснований считать, что в пустотах, образуемых основной фракцией, частицы более мелкой фракции займут ту же часть объема, что и частицы основной во всем объеме сосуда. Здесь пользуемся тем, что объем, занимаемый частицами при достаточно большом их количестве, не зависит от формы заполняемой области.

Но так как для основной первой фракции коэффициент заполнения  $\eta_0 = V_{\text{ш}}^0/V = 0,74$  и, следовательно, объем пустот составит  $0,26V$ , то объем, занятый шарами второй фракции<sup>1</sup> (при том же способе упаковки), составит  $V_{\text{ш}}^1 = 0,74 \cdot 0,26V$ . Следовательно, коэффициент заполнения двумя такими фракциями  $\eta_1 = \frac{V_{\text{ш}}^0 + V_{\text{ш}}^1}{V} =$   
 $= 0,74(1 + 0,26) \simeq 0,93$ .

Таким образом, введением второй фракции, основанное на принципе свободной фильтрации, существенно ( $\sim 20\%$  вместо  $5\%$ , как при касании) повышает плотность упаковки.

При введении третьей фракции, основанном на том же принципе, получаем следующую оценку. Поскольку свободный объем после загрузки первых двух  $V - (V_{\text{ш}}^0 + V_{\text{ш}}^1) = 0,068V$ , а шары третьей фракции по-прежнему (при соответственно мелком размере по отношению к шарам второй) занимают объем  $V_{\text{ш}}^2 = 0,74 \cdot 0,068V$ , то коэффициент заполнения тремя фракциями  $\eta_2 = (V_{\text{ш}}^0 + V_{\text{ш}}^1 + V_{\text{ш}}^2)/V = \eta_1 + 0,74 \cdot 0,68 \simeq 0,98$ , т. е.  $98\%$  всего объема сосуда.

Разумеется, проведенные оценки основаны на некоторых идеализациях. Однако для реальной ситуации они носят такой же ориентировочный характер, как и оценки, полученные для упаковки по принципу взаимного касания.

При свободной фильтрации соблюдение жестких требований к реальному размеру частиц очередной фракции не столь существенно, как в предшествующем случае: не слишком важны и предположения относительно формы частиц, поскольку эффект достигается в основном за счет резкого разрыва в размерах частиц фракций.

Таким образом, принцип свободной фильтрации оказывается эффективнее принципа взаимного касания.

Массовые пропорции, в которых должны смешиваться фракции, определяются отношением занимаемых ими объемов, так что  $m_0 : m_1 : m_2 = 0,74 : 0,192 : 0,0503$ . Это означает, что на каждую массовую часть основы следует взять  $\sim 0,26$  мас/ч второй фракции и  $\sim 0,07$  мас/ч третьей.

<sup>1</sup> Расчет идет по сферическим частицам.

Конкретные размеры частиц при этом не играют роли ни для оценки плотности, ни для оценки пропорций, лишь бы они были (для каждой фракции) существенно меньше размеров пор в предыдущей; например,  $r_1 \sim 0,01 \div 0,02R$  и  $r_2 \sim 0,01 \div 0,02r_1$ .

Таким образом, на уровне полукачественного, чисто геометрического анализа порошковой смеси удастся получить практически важные оценки пропорций различных фракций, участвующих в смеси на первой стадии технологического цикла. Преимущественным вариантом оказываются при этом многофракционные смеси, составленные по принципу свободной фильтрации.

В этой связи уточним понятие многофракционной смеси, не связывая его жестко с формой частиц, в отличие от расчета, приведенного выше.

Будем говорить, что частицы принадлежат одной фракции, если все они имеют характерные размеры одного порядка. Для фракций можно ввести понятие среднего размера частиц  $\bar{r}$  и средней плотности фракции  $\bar{\eta}$ .

Рассмотрим две фракции со средними размерами частиц  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ , считая, что  $\bar{r}_2 \ll \bar{r}_1^1$ .

Если эти фракции геометрически однотипны, то их средние плотности  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}$  совпадают, так как  $\bar{\eta}$  есть величина, не зависящая от масштаба.

Пусть поры первой фракции засыпаны частицами второй фракции до отказа. Исходя из условий  $\bar{r}_2 \ll \bar{r}_1 \ll L$ , где  $L$  — характерный размер сосуда, заключаем, что полученная двухфракционная смесь имеет плотность  $\eta = \bar{\eta} + (1 - \bar{\eta}) \bar{\eta} = 2\bar{\eta} - \bar{\eta}^2 = 1 - (1 - \bar{\eta})^2$ , где  $(1 - \bar{\eta})^2$  — относительный объем оставшихся пустот в двухфракционной смеси.

Пусть указанным способом получена смесь из  $n$  геометрически однотипных фракций с относительной плотностью  $\bar{\eta}$  и средними размерами частиц  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ :  $\bar{r}_{n-1} \ll \dots \ll \bar{r}_2 \ll \bar{r}_1$ .

Тогда нетрудно видеть, что плотность указанной  $n$ -фракционной смеси может быть получена по формуле

$$\bar{\eta}_n = 1 - (1 - \bar{\eta})^n. \quad (5.16)$$

Эффект повышения плотности с ростом числа фракций  $n$  хорошо иллюстрируют данные табл. 5.3, рассчитанные для случая  $\bar{\eta} = 0,7$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_k/r_{k-1} = 0,02$ .

Основная трудность при реализации этого метода — получение и контроль размеров сверхтонких фракций. Но так как в пределах одной фракции практически невозможно получить высокую плотность, то нет приемлемой альтернативы применению

<sup>1</sup> Для практики можно считать, что  $\bar{r}_1 \simeq (50 \div 100) \bar{r}_2$ . Эта приближенная оценка получается по-прежнему из сферической формы частиц, так как порошок, состоящий из сферических частиц одного размера, при максимально плотной упаковке имеет поры с размером порядка  $0,4d$ , где  $d$  — диаметр частицы.

### 5.3. Результаты расчета многокомпонентной смеси на основе принципа свободной фильтрации

Число фракций $n$	1	2	3	4
Плотность $\bar{\eta} (n)$	0,7	0,91	0,973	0,99919
Отношение радиусов $r_k/r_{k-1}$	1	0,02	0,0004	0,000008

смесей, составленных из сильно отличающихся по средним размерам фракций.

Использование соответствующих пропорций при изготовлении порошков на предприятиях ПО ЗИЛ дало хорошие результаты.

#### 5.3.3. Обобщающая постановка задачи оптимизации гранулометрического состава порошковой смеси и ее решение методом стохастического моделирования на ЭВМ

Ниже приведены некоторые результаты работы [44], в которой впервые предложен строгий математический анализ проблемы оптимизации гранулометрического состава порошковых смесей. Результаты математического эксперимента, проведенного методом Монте—Карло, получены в рамках сотрудничества МГУ и ПО ЗИЛ.

Не будем интересоваться конкретным геометрическим расположением частиц (гранул) в некотором сосуде, ибо, не предполагая периодичности структуры, рассчитать такое расположение практически невозможно при большом числе частиц. Будем использовать лишь общие факты, вытекающие из рассмотрения возможных расположений гранул. Такой подход при последовательном математическом анализе дает возможность получить заранее неочевидные ответы на вопросы, связанные с математической постановкой задачи о подборе гранулометрического состава.

Назовем частицу звездной, если внутри нее есть точка, «центр звездности», обладающая следующим свойством: любой луч с началом в этой точке пересекает границу частицы лишь однажды.

Все частицы, образующие смесь, будем считать звездными и геометрически подобными.

Под диаметром (линейным размером такой частицы) будем понимать максимально возможное расстояние между двумя ее произвольно выбранными точками. Любой гранулометрический состав, помещенный в заданный объем тела  $Q$ , можно охарактеризовать набором диаметров частиц  $\{d_i\}$ , число которых  $N$  может быть

весьма большим. Такому набору можно поставить в соответствие функцию распределения

$$f(x) = \sum_{d_i < x} d_i^3 / \sum d_i^3, \quad (5.17)$$

называемую объемной гранулометрией. Поскольку при принятых предположениях объем, занимаемый частицами, пропорционален  $d_i^3$  с одним и тем же для всех частиц коэффициентом пропорциональности  $v = cd_i^3$ , то  $f(x)$  с точностью до коэффициента выражает относительный объем, заполненный частицами, диаметр которых не превосходит  $x$ . Поэтому зная  $f(x)$ , можно указать, в частности, в каких массовых пропорциях при этом смешаны частицы, обладающие теми или другими, из конечного числа заданных, диаметрами: для частиц одинаковой природы эти массы пропорциональны занимаемым объемам.

Будем говорить, что набор частиц  $\{d_i\}$  плотно упаковывается в некоторую форму  $Q$ , если возможно такое его размещение внутри  $Q$ , что, с одной стороны, частицы не будут пересекаться между собой и, с другой стороны, для любого  $\mu \geq 1$  набор частиц  $\{\mu d_i\}$  уже не может быть размещен без взаимного пересечения каких-либо частиц.

Очевидно, что если, например,  $Q$  — кубическая форма, то в ней можно упаковать с нулевой пористостью кубические частицы одинаковых диаметров. Однако не очевидно, можно ли упаковать с нулевой пористостью шары, эллипсоиды, неправильные тетраэдры или частицы другой конфигурации в эту кубическую форму. Тем более ответ не очевиден для произвольной формы, отличной от кубической.

Путем строгого математического анализа можно установить, однако, что какова бы не была форма заполняемого сосуда и какова бы не была конфигурация частиц, всегда можно так подобрать последовательность диаметров частиц  $\{d_i\}$ , вообще говоря бесконечную, что сосуд будет ими заполнен плотно с нулевой пористостью. Это совершенно новый факт, установленный в работе [44] на основе теоретико-функционального анализа проблемы и не вытекающий из ее геометрического анализа. Геометрический анализ ничего не говорит также о том, насколько зависит плотность пористой упаковки частиц при каждой заданной объемной гранулометрии  $f(x)$  от формы пористого брикета.

Пусть  $Q$  — форма такого брикета, который является плотной упаковкой частиц, соответствующих распределению по размерам

$f(x)$ . Объем всех  $N$  частиц в брикете  $V_N = c \sum_{i=1}^N d_i^3$ . Если  $V_Q$  есть

видимый объем пористого брикета ( $V_Q = \text{const}$ ), то пористость такой упаковки  $\xi_N = 1 - (V_N/V_Q)$ . Оказывается [44], что существует  $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = \xi$ , не зависящий от формы  $Q$  пористого брикета. Тем

самым получен однозначный ответ и на второй, поставленный выше, вопрос.

Очевидно, что указанный предел зависит от  $f(x)$ , т. е. является функционалом от  $f$ :  $\xi = \xi[f]$  [43]. Этот функционал назовем функционалом пористости плотной упаковки частиц состава  $f(x)$ .

Из возможности подбора размеров частиц, обеспечивающего нулевую пористость брикета, вытекает существование такой объемной гранулометрии  $f_m(x)$ , для которой  $\xi[f_m(x)] = 0$ .

Наибольшее значение пористости получается, если все частицы одинаковы, т. е. когда  $f_m(x) = 0$  при  $x \leq 1$  и  $f_m(x) = 1$  при  $x > 1$ . Обозначим  $\xi^0 = \sup_f \xi[f]$ . Для сферических частиц пористость плотно упакованного брикета из одинаковых составляющих, как отмечено выше, равна  $\xi^0 = 0,26$ . Для всех остальных функций распределения  $f(x)$  значение функционала пористости заключено между указанными нижним и верхним пределами:  $0 \leq \xi[f(x)] \leq \xi^0$ .

Отметим некоторые свойства функционала пористости  $\xi = \xi[f]$ , установленные в работе [44].

1.  $\xi = \xi[f]$  непрерывно зависит от  $f$ , т. е. мало меняется при малом изменении  $f$ . Это значит, в частности, что невозможно получить выигрыш в пористости, если частицы близки по размерам.

2.  $\xi[f(\mu x)] = \xi[f(x)]$ ,  $\mu > 0$ . Иначе говоря, пористость не меняется при одновременном изменении масштабов всех частиц. Например, при гексагональной упаковке с соблюдением условия заполнения сосуда пористость не зависит от размеров частиц. Этот факт оказывается общим и означает, что заданного значения пористости можно добиться различными способами, т. е. различными распределениями  $f(x)$ . Это открывает возможности для поиска наиболее экономичного выбора  $f(x)$ .

3. Функционал  $\xi[f]$  является квазивыпуклым [20] и удовлетворяет неравенству  $\chi[\mu f_1 + (1 - \mu)f_2] \leq \varphi \leq \xi[f_1] + (1 - \mu)\xi[f_2]$ , где  $0 < \mu < 1$ ,  $\varphi = \mu(1 - \xi[f_2]) / [\mu(1 - \xi[f_2]) + (1 - \mu)(1 - \xi[f_1])]$ .

Факты, установленные для множества частиц достаточно произвольной подобной формы, делают возможным постановку задачи оптимизации гранулометрического состава.

В идеальной постановке формулируется задача 1: найти  $f(x)$  из условия

$$\inf \xi[f]; f \in F, \quad (5.18)$$

где  $F$  — заданное множество функций распределения.

Из свойств 1—3 следует, что такая постановка состоятельна [86], т. е. задача имеет решение. Поскольку  $F$ , как множество монолитных и ограниченных функций, — компакт [66], а  $\xi[f]$  — непрерывный и квазивыпуклый функционал, то решение устойчиво, т. е. слабо зависит от погрешности определения  $\xi$ . Однако решение этой задачи неединственно. Для получения един-

ственного решения необходимо дополнить постановку указанием на то, каким заранее заданным общим свойством решение должно обладать. Одним из таких указаний, вытекающим из проведенного ранее анализа, является следующее. Все частицы должны делиться на фракции, резко различающиеся по их размеру. Для сферических частиц такой вариант постановки рассматривался в работах [92, 96].

На практике имеем дело с порошками, размеры частиц которых заключены в пределах  $d_m \leq d \leq d_M$ .

В этом случае задача минимизации решается на подмножестве функций распределения  $F^* = \{f \in F : f(d_m) = 0, f(d_m + 0) = 1\}$ . Соответствующая постановка (задача 2) сводится к тому, чтобы найти  $f(x)$  из условия

$$\inf \xi [f], f \in F^*. \quad (5.19)$$

Эта задача обладает теми же свойствами, что и задача 1.

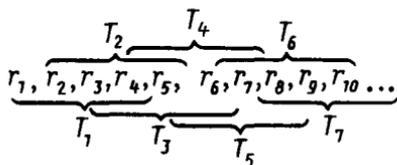
Таким образом, в работе [44] показана принципиальная возможность оптимизировать пористость по гранулометрическому составу в определенном смысле независимо от формы частиц. Необходимо, однако, для практической реализации, чтобы все частицы имели одинаковую форму и физические факторы в итоге оказывали столь малое влияние, чтобы была практически возможна их плотная укладка. Заметим, что соблюдение последнего условия может быть косвенно связано с формой частиц.

Для решения поставленных задач оптимизации с помощью того или иного метода поиска минимума на заданном множестве достаточно уметь вычислять значение функционала  $\xi$  при каждой заданной функции  $f(x)$ . Однако для этого должен быть указан алгоритм вычисления  $d_i$  — диаметра частиц при любом  $i$ . Это значит, что практическая оптимизация гранулометрического состава уже невозможна без некоторой конкретизации модели, что совершенно естественно.

Для конкретной модели гранулы при расчете целевого функционала в работе [44] используется метод стохастических испытаний, принципиальную схему которого кратко опишем применительно к сферическим частицам в гексагональной периодической структуре. В этом случае  $V_i = (4/3) \pi r_i^3$ , где  $r_i = d_i/2$ . В качестве основы структуры можно взять неправильный тетраэдр, вершины которого совпадают с центрами попарно касающихся шаров радиусов  $r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}$ . Очевидно, если известны четыре таких числа, то легко вычислить объем тетраэдра, суммарный объем шаров и соответственно суммарный объем тех частей шаров, которые находятся внутри тетраэдра.

Алгоритм вычисления приближения к функционалу пористости  $\xi = \xi [f]$  основан на процедуре формирования на ЭВМ порошковой смеси с соблюдением пропорций, диктуемых функцией  $f(x)$ . Формирование производится последовательным образованием одной элементарной ячейки за другой, пока не будет запол-

Рис. 5.13. Схема выборки радиусов шаров при расчете плотности упаковки методом Монте-Карло



нен столь большой объем, что по нему можно судить о величине плотности структуры.

Для того чтобы не нарушить пропорции при формировании отдельной ячейки, примем  $f(x)$  за интегральную вероятностную функцию распределения частиц по размерам. Соответственно величины  $r_i$  радиусов частиц будем рассматривать как случайные величины, распределенные по указанному закону.

Для формирования первой ячейки нужно выбрать четыре случайных числа:  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . Эти значения определяются как решения уравнения

$$f(x) = \gamma_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.20)$$

где  $\gamma_n$  — случайная величина с равномерным распределением на сегменте  $[0, 1]$ , задаваемая программой-датчиком, входящим в состав математического обеспечения ЭВМ. Поскольку заведомо  $x \in [0, 1]$  и на этом сегменте  $f(x)$  строго возрастает, то для решения уравнения при каждом  $\gamma_n$  можно использовать метод «вилки» или его специальные модификации.

Если  $i = 1$ , то по найденным четырем корням вычисляется объем шаров внутри тетраэдра  $V_1^m$  и объем тетраэдра  $V_{T_1}$ .

К полученной первой ячейке пристраиваются последующие по схеме, представленной на рис. 5.13.

Для этого каждый раз выбирается новое случайное число  $\gamma_n$  и решается уравнение (5.20). Параллельно с образованием нового

( $i$ -го) тетраэдра накапливаются суммы  $\sigma_{1n} = \sum_{i=1}^n V_i^m$  и  $\sigma_{2n} = \sum_{i=1}^n V_{T_i}$  и вычисляется величина  $\xi_n = 1 - \sigma_{1n}/\sigma_{2n}$ , характеризующая приближенно среднюю плотность в структуре из  $n$  элементарных ячеек.

Одновременно вычисляется величина  $|\xi_n - \xi_{n-1}|$ , ( $\xi_0 = 0$ ), которая сравнивается с заданной константой  $\epsilon_1$ ; если  $|\xi_n - \xi_{n-1}| > \epsilon_1$ , то к некоторому счетчику  $N$  добавляется единица, в противном случае этого не делается. Таким образом вычисляется значение  $N$  — число случаев, когда два соседних приближения величины  $\xi$  недостаточно близки. Поскольку число испытаний  $n$  также известно, попутно считается и отношение  $N/n$ , аппроксимирующее вероятность того, что соседние приближения недостаточно близки.

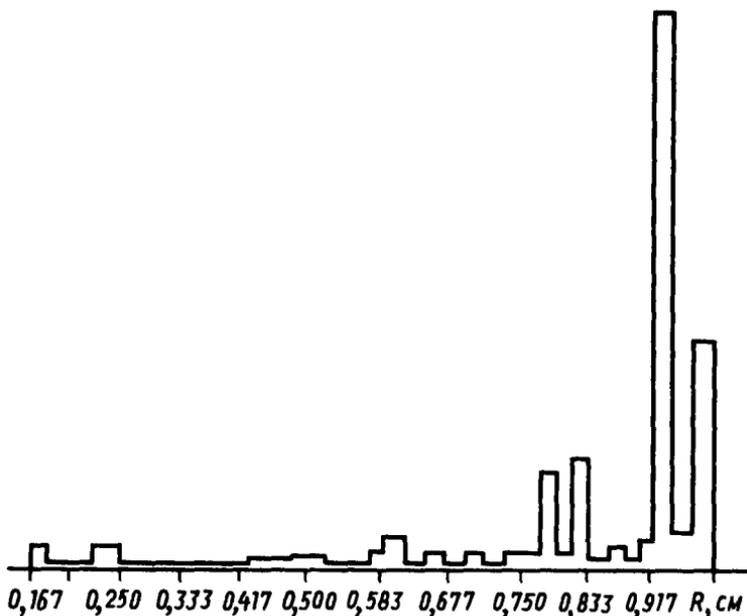


Рис. 5.14. Плотность распределения гранулометрического состава

Процесс заканчивается по условию  $N/n < \epsilon_2$ , где  $\epsilon_2$  также заданная величина.

Поскольку значения функционала определены алгоритмически, с помощью описанной процедуры, то для задачи минимизации можно использовать, например, метод сопряженных градиентов. Для его практической реализации достаточно аппроксимировать непрерывную функцию  $f(x)$  монотонной сеточной. Это не препятствует методике вычисления функционала, поскольку на сеточный «каркас» можно «натянуть» кусочно-линейную функцию, определенную при всех значениях аргумента.

Отметим, что метод Монте—Карло применяется для решения задач как детерминированных, так и статистических. В нашем случае вычисляемая плотность и пористость смеси являются детерминированными величинами. Однако используемый для их вычисления метод можно рассматривать как прямое статистическое моделирование процесса засыпки и перемешивания порошков с гранулами различных размеров.

Таким образом, процедуру минимизации пористости с использованием метода Монте—Карло при вычислении функционала можно рассматривать как прямое моделирование на ЭВМ процесса засыпки при различных пропорциях между засыпаемыми компонентами, из которых путем автоматизированного подбора выбирается оптимальная для принятой модели гранулометрического состава.

В результате расчета на ЭВМ в работе [44] получена средняя плотность упаковки  $\eta \approx 0,79$ , что соответствует двухкомпонентной смеси при правильном размещении шаров в наиболее плотной (гексагональной) упаковке. Заметим еще раз, что однофракционная упаковка не может дать большую плотность, чем 0,74, и эта плотность достижима при гексагональной упаковке. На рис. 5.14 представлено в относительных единицах полученное при этом распределение числа частиц по размерам. Видно, что максимальное число, соответственно максимальная масса, приходится на наиболее крупные частицы и монотонно убывает от крупных к мелким. С другой стороны, обнаруживается пять основных фракций с приблизительными относительными размерами: 1; 0,8; 0,6; 0,25; 0,17. Смещение пропорций в сторону большего радиуса по сравнению с геометрическим расчетом естественно, если принять во внимание неправильное распределение частиц при случайной их засыпке.

Приведенный пример расчета относится к модели смеси, формируемой по принципу взаимного касания. Разумеется, аналогичное моделирование можно реализовать и для формирования смеси на основе многофракционного метода (принцип свободной фильтрации). Последний оказывается менее чувствительным к нарушению условий плотной упаковки фракций и в принципе позволяет получить сколь угодно низкую пористость, если размеры частиц в различных фракциях достаточно сильно отличаются друг от друга.

Вопрос о практическом использовании этого принципа становится, однако, с проблемой изготовления сверхтонких фракций. Вместе с тем для таких фракций в большей степени проявляются более тонкие физико-химические эффекты при засыпке. Это требует разработки технологии засыпки, которая способствовала бы оптимальному расположению частиц при рассчитанных оптимальных пропорциях фракций.

#### **5.3.4. Математическое моделирование спекания пористых образцов в газовых печах**

Рассматриваемая задача связана с одним из распространенных способов спекания порошковых образцов после холодного прессования. Спекаемые изделия изготавливают из металлического железного порошка стандартных марок (ПЖО—ПЖ2) с добавлением графита и стеарата цинка.

В печи предусмотрены две зоны нагрева. В первой зоне при температуре 500 °С происходит выжигание стеарата цинка. Этот эффект в изделиях массой до 0,5—1,5 кг может быть достигнут, если выдержка в первой зоне составляет не менее 0,8—1,0 ч. Собственно спекание происходит во второй зоне при температуре 1050 °С. Следует отметить, что большинство деталей укладывают столбиком по базовой плоскости.

Не анализируя достаточно сложные физико-химические процессы, протекающие в образцах, будем считать, как это принято, что для достижения требуемого эффекта достаточно, чтобы деталь была насквозь прогрета до температуры газовой среды.

При такой постановке задачи целью математического моделирования является оценка времени, необходимого для сплошного прогрева всех деталей с учетом некоторых конструкционных особенностей спекающего устройства.

Математическая модель процесса основывается на следующих соображениях.

1. Хотя пористость материала меняется в процессе нагрева, ее средняя величина ( $\sim 15\%$ ) известна. Соответственно осредненный коэффициент теплопроводности  $\lambda$  пористого материала [29] можно определить по методике, изложенной в п. 4.5, и расчет  $\lambda$  провести с помощью специальной программы-датчика, постулируя форму закрытых или проникающих пор в соответствии с имеющимися у технолога представлениями. Вспомним, что простейшая формула по упомянутой методике выглядит так:  $\lambda = 1 / (p/\lambda_v + (1-p)/\lambda_m)$ , где  $p$  — пористость,  $\lambda_v$  — теплопроводность воздуха в поре;  $\lambda_m$  — теплопроводность металла. Такой учет пористости приводит к заметному отлнчию этого параметра от его значения для сплошного материала, поскольку для стали  $\lambda_m/\lambda_v = 1000$ , так что  $\lambda \approx 26,8$  Вт/(м·°С). Расчет осредненной массовой теплоемкости  $c\gamma$  провести проще, поскольку эта величина не зависит от формы пор:  $c\gamma = p(c\gamma)_v + (1-p)(c\gamma)_m$ .

2. Применяемые оценки параметров, не учитывающие фактического сокращения объема пор, что является целью процесса, неизбежно приводят к завышенным оценкам времени пребывания деталей в зоне спекания. Такие оценки приемлемы для ориентации в порядке определяемой величины, но, принимая во внимание их приближенный характер, можно поступить с зависимостью теплофизических характеристик от времени и точки пространства, осреднив все полученные выше параметры еще и по температуре. Эта гипотеза была проверена М. А. Осипенко на примере расчета пространственно одномерных моделей: нелинейной и линейной указанного типа. Оказалось, что расхождение результатов значительно меньше того, которое определяется эффектом пористости по сравнению со сплошным металлом. Этот эксперимент позволяет описывать процесс уравнением с постоянными осредненными коэффициентами, что существенно сокращает время расчета по сравнению с нелинейной моделью.

3. Каждый столбик деталей, достаточно плотно прилегающих друг к другу, можно рассматривать изолированно от других, что соответствует конструкции технологической оснастки при спекании типа «лодочка». Напротив, зазоры между лежащими одна на другой одинаковыми деталями в каждом столбике можно не учитывать, считая столбик сплошным. Расчеты показали, что

учет зазоров с помощью введения коэффициента «порозности»  $p^*$  и пересчет уже определенных выше теплофизических параметров по той же методике не приводит к существенным поправкам.

4. Сравнение результатов контрольных расчетов с экспериментальными замерами температуры деталей во второй зоне печи в заданные моменты времени показали, что условия конвекции газовой среды в печи, по-видимому, таковы, что ее температура почти мгновенно выравнивается до заданной величины  $u_2 = 1050^\circ\text{C}$  после введения относительно холодной партии деталей (в отличие от температуры самих деталей). Это позволяет считать температуру среды на поверхности столбиков постоянной величиной заданного уровня.

5. Возможные различия в условиях теплообмена на боковых гранях столбиков и на торцах — верхнем и нижнем основании, связанные со способом крепления, будем учитывать с помощью различия в коэффициентах теплообмена на этих поверхностях, считая этот коэффициент достаточно большим. На торцах возможные его значения  $\sim 291 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , на боковой поверхности он настолько велик, что можно воспользоваться предельным случаем теплообмена — краевыми условиями первого рода. Рассматриваемые далее варианты краевых условий соответствуют различным конструкционным решениям технологической оснастки относительно условий теплообмена.

При указанных допущениях процесс спекания на уровне чисто термических оценок описывается пространственно-трехмерным уравнением теплопроводности с осредненными постоянными коэффициентами при соответствующих краевых и начальном условиях. Если отнести индекс  $s = 1$  и  $s = 2$  соответственно к первой и второй зоне печи, то математическая модель будет иметь вид:

$$\hat{\lambda} \Delta t_s = \hat{c} \hat{\gamma} \frac{\partial t_s}{\partial \tau} \quad (0 \leq x \leq l, \quad 0 < z < h);$$

$$\varphi_{0s} < \varphi \leq \hat{t}_s; \quad (5.21)$$

$$t(M, \varphi_{0s}) = t_{0s};$$

$$t(M_{\text{БОК}}, \varphi) = u_s, \quad l_0(t)|_{z=0} = 0, \quad l_h(t)|_{z=h} = 0.$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа, записанный в декартовых координатах, поскольку оценка проводится для образцов прямоугольной формы;  $\varphi_{01} = 0$  и соответственно  $t_{01} = 20^\circ\text{C}$  — температура деталей до помещения в печь;  $\varphi_{02} = 1$  ч и соответственно  $t_{02} = t_{02}(x, y, z)$  — распределение температуры в момент выхода деталей из первой зоны;  $u_1 = 500^\circ\text{C}$ ;  $u_2 = 1050^\circ\text{C}$ ;  $l_0(t)$  и  $l_h(t)$  — условная запись операторов в граничных условиях на торцах. Температурное поле рассчитывалось в трех различных вариантах:

$$1) l_0(t) \equiv \hat{\lambda} \frac{\partial t}{\partial z} - H(t - u_s), \quad l_h(t) \equiv t - u_s,$$

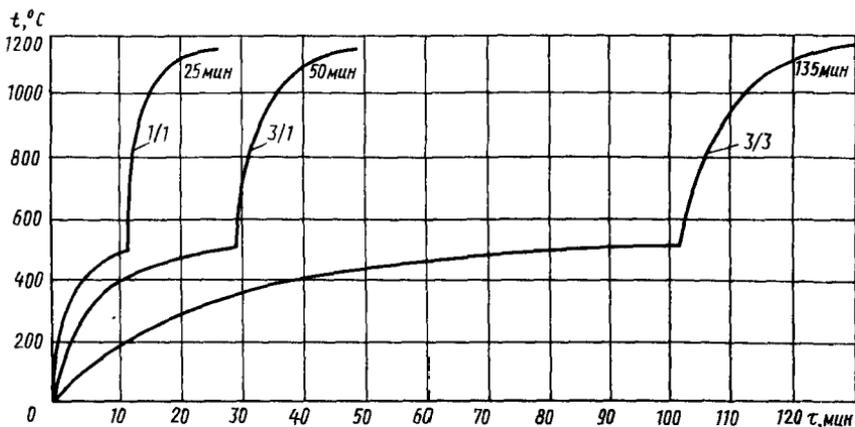


Рис. 5.15. Температура спекания при различных краевых условиях (дробь у кривых — номера краевых условий: числитель соответствует краевому условию при  $z = 0$ , знаменатель — при  $z = h$ )

т. е. на нижнем торце выполняется условие третьего рода, на верхнем — первого рода;

$$2) l_0(t) \equiv \hat{\lambda} \frac{\partial t}{\partial z} - H(t - u_0), \quad l_h(t) \equiv \hat{\lambda} \frac{\partial t}{\partial z} - H(t - u_0),$$

т. е. на обоих торцах выполняется краевое условие третьего рода;

3)  $l_0(t) = l_1(t) \equiv t - u_0$  — на обоих торцах выполняется краевое условие первого рода.

Решение задачи (5.21) алгоритмически определялось с помощью локально-одномерной разностной схемы [73] расчетом на ЭВМ.

На рис. 5.15 представлены зависимости минимальной по объему столбика температуры от времени для каждого из трех вариантов краевых условий. Излом на кривых соответствует переходу при температуре  $500^\circ\text{C}$  из первой зоны печи во вторую. Видно, что за счет конструктивных решений (вариант 1/1) можно получить заметный выигрыш во времени. (Время нагрева в минутах указано около каждой кривой). Обсуждение соответствующих инженерных задач, связанных с вентиляцией газовой среды, выходит за рамки настоящей книги.

Ниже рассмотрим термические модели задачи горячего прессования порошков при различных возможностях их конструктивного решения.

### 5.3.5. О математическом моделировании контактного способа спекания образцов

В работе [22] экспериментально-математическому изучению подвергается другой способ спекания заготовок, при котором нагрев металлического порошка, помещенного в цилиндрическую пресс-

форму, проводится гармоническим током частоты  $\omega$  и амплитуды  $I$  [40].

Известно, что градиент температуры в сжимаемой заготовке из порошкового материала приводит к отрицательным явлениям. Особенно сильно неоднородность температурного поля проявляется при компактировании порошков сплавов, теплопроводность которых мала (например, титановых). В этом случае происходит остывание по контуру брикета, и при его деформации может образоваться крупнокристаллический ободок с пониженными прочностными свойствами. Неоднородность деформации при компактировании, возникающая из-за неоднородности температурного поля, ведет к появлению разрывов на поверхности деталей. Таким образом, качество и механические свойства изделия находятся в прямой зависимости от однородности температурного поля в процессе спекания.

Управлять степенью однородности температурного поля, индуцируемого в спекаемом брикете, можно, выбирая конфигурацию электродов, контактирующих с брикетом на торцах.

Соответственно одна из задач прогнозирования процесса спекания состоит в том, чтобы для заданной характерной частоты тока и при типичных значениях параметров теплообмена с внешней средой оценить величину тока  $I$  и выбрать из некоторого множества возможных форму и размеры электродов, при которых в стационарном режиме достигается равномерный в пределах допуска  $\delta$  нагрев брикета до нужной температуры.

Эта задача решается для модели, в которой не учитывается в явном виде влияние динамических факторов. Здесь, как и в предшествующей задаче, описание микропроцессов, связанных со спеканием, заменяется заданием эффективных теплофизических характеристик порошкового материала, поскольку на этот счет имеется экспериментальная информация [40]. Так, на рис. 5.16 представлена характеристика зависимости коэффициента теплопроводности спекаемого материала от температуры  $\lambda = \lambda(t)$ , полученная из эксперимента. Электрическая проводимость того же материала  $\sigma(t)$  связывается с нею законом Видемана—Франца  $\lambda/\sigma = TL_0$ , где  $T$  — температура по Кельвину;  $L_0 = 2,44 \times 10^{-8}$  Вт·Ом/К<sup>2</sup>. Для остальных параметров задачи оказывается возможным установить осредненные по температуре постоянные значения.

Как и в предшествующей задаче, принимается, что изотерми-

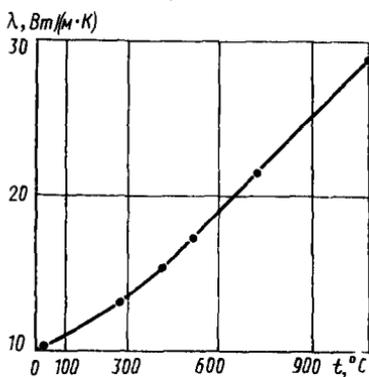


Рис. 5.16. Экспериментальная зависимость коэффициента теплопроводности спекаемого материала от температуры

ческая выдержка материала на должном уровне в квазиоднородном температурном поле обеспечивает качество результата, характеризующее степень связности структуры, величиной зерна и т. п.

Предполагая электроды, пропускающие ток, аксиально-симметричными, стационарное температурное поле в брикете можно описать следующими условиями:

$$A(t, H) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \frac{\sigma(t)}{2} \left( \left| \frac{\partial H}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \right|^2 \right) = 0, \quad |z| < l, \quad 0 < r < R; \quad (5.22)$$

$$-\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha(t|_{r=R} - t_0), \quad -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=\pm l} = \pm \alpha(t|_{z=\pm l} - t_0);$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} = 0.$$

$$B(t, H) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma(t)} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + i\omega_{\mu}(t) H = 0; \quad (5.23)$$

$$H|_{r=0} = 0, \quad H|_{r=R} = \frac{I}{2\pi R}, \quad H|_{z=\pm l} = \frac{I}{2\pi R} \tilde{f}(r),$$

где  $A(t, H)$ ,  $B(t, H)$  — сокращенные обозначения указанных дифференциальных операторов;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи брикета через пресс-форму, значение которого принято в работе [22] равным  $15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , что соответствует сравнительно хорошей теплоизоляции. Функция  $\tilde{f}(r)$  характеризует распределение тока по радиусу торца, учитывая тем самым форму и размеры электродов (форм-фактор).

При любом наборе управляющих параметров  $\{\tilde{f}(r), I\}$  температурное поле алгоритмически определено вследствие разрешимости задачи (5.22), (5.23) на ЭВМ конечно-разностными методами. В работе [22] для этой цели использовали специально разработанную программу-датчик, реализующую метод Зейделя [90] для консервативной разностной схемы. Ввиду нелинейности задачи этот метод действует на каждом шаге  $s$  итерационного процесса вида

$$A(t, H^{(s)}) = 0 \Rightarrow t^{(s)}, \quad B(t^{(s)}, H) = 0 \Rightarrow H^{(s+1)} \quad (5.24)$$

$$(s = 0, 1, \dots),$$

где начальное приближение равно температуре внешней среды  $t_0$ .

Наличие программы-датчика позволяет изучать зависимость температурного поля от управляющих стационарным его распределением параметров.

При заданной характерной циклической частоте тока его амплитуда  $I$  определяет уровень нагрева  $\tilde{f}$ , который в рассматриваемой задаче спекания задан и составляет около  $1200^\circ\text{C}$ .

Форма электродов при заданном токе определяется степенью равномерности порожденного током поля.

В этой связи в работе [22] была предложена следующая последовательность операций при подборе оптимальных параметров, обеспечивающих с определенным допуском решение задачи, поставленной в начале настоящего пункта:

а) при заданной геометрии электродов определить оптимальную силу тока таким образом, чтобы средняя по телу брикета  $D$  температура имела заданную величину  $\bar{t} : (\max_D t [M, I] + \min_D t [M, I])/2 = \bar{t}$ ; очевидно, что определенная таким образом оптимальная сила тока  $I_{\text{опт}}$  оказывается функцией от типа и геометрических параметров электрода;

б) вычислить реальную дисперсию температурного поля при оптимальной в указанном смысле силе тока:  $\delta = \max_D t [M, I_{\text{опт}}] - \min_D t [M, I_{\text{опт}}]$ , по величине которой и провести выбор оптимальной в рамках заданных геометрических моделей формы и размера электродов; очевидно, что величина  $\delta$  является уже функцией только форм-фактора; и поскольку параметры электродов варьируются в ограниченных пределах, выбор его по минимуму величины  $\delta$  осуществим.

В расчетах, проведенных в работе [22], сопоставлялись дисковые ( $0 \leq r \leq a$ ) и кольцевые ( $a \leq r \leq b$ ) электроды одинаковой площади, так что в сравниваемых вариантах обеспечивается при заданном  $I$  одинаковая плотность тока  $j$ .

Для дискового и кольцевого электродов  $f(r)$  выражается соответственно следующими формулами:

$$\bar{f}(r) = \begin{cases} r^2/a^2, & 0 \leq r \leq a, \\ 1, & a < r \leq R; \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\bar{f}(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & a \leq r \leq b, \\ 1, & b < r \leq R. \end{cases} \quad (5.26)$$

Приводимые ниже результаты расчета относятся к немагнитному материалу, для которого осредненные параметры  $s$  и  $\gamma$  имеют значения:  $0,55 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $8,3 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$  соответственно, и к нагреву высокочастотным гармоническим током частоты  $f = 1 \text{ кГц}$  ( $\omega = 2\pi f$ ).

На рис. 5.17 в логарифмическом масштабе представлены зависимости средней температуры от силы тока для различных конфигураций электродов. При заданном уровне  $\bar{f}$  эти зависимости позволяют выбрать оптимальную силу тока.

На рис. 5.18 изображены зависимости максимальной и минимальной по  $z$  температуры от радиуса в оптимальном режиме

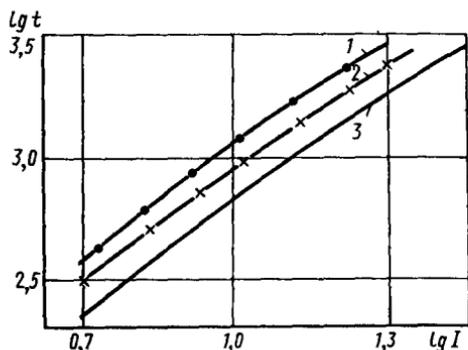


Рис. 5.17. Зависимость средней температуры от силы тока:

1, 3 — дисковые электроды (1 —  $a = R/4$ ; 3 —  $a = R/2$ ); 2 — кольцевой электрод ( $a = R/4$ ;  $b = R/\sqrt{6}$ )

и для различных параметров дисковых и кольцевых электродов. Эта номограмма достаточно наглядно иллюстрирует зависимость дисперсии поля от выбора конфигурации электродов.

Оба графических представления могут рассматриваться, очевидно, как первичные номограммы процесса, позволяющие решать задачи о выборе оптимальной силы тока и соответственно оптимальной конфигурации электродов из заданного класса моделей, что допускает полную автоматизацию.

Числовые характеристики технологического процесса, полученные в работе [22] как результат математического эксперимента в рамках термической модели, представлены в табл. 5.4.

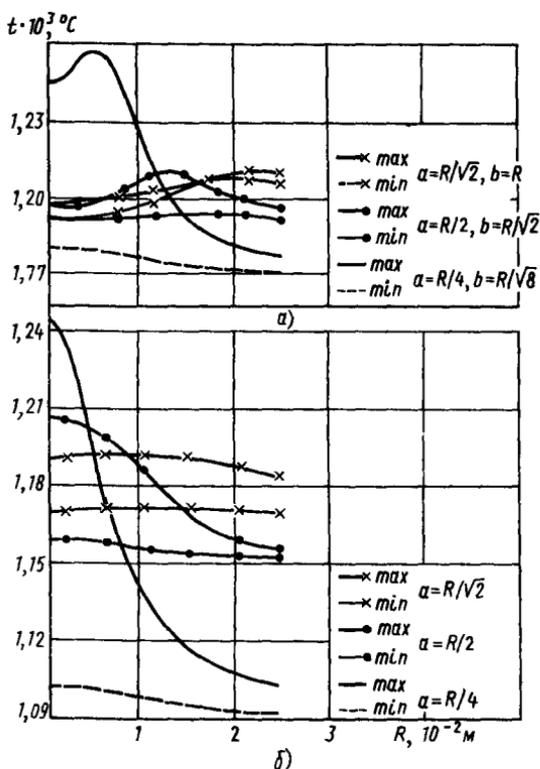


Рис. 5.18. Зависимость температурного поля в оптимальном режиме спекания от радиуса образца для кольцевых (а) и дисковых (б) электродов

**5.4. Результаты расчета числовых характеристик процесса спекания порошковых изделий**

Вариант сопоставимых электродов	Характеристики электродов	Характеристики процесса		
		Амплитуда тока $I_{оп}$ , А	Оценка, °С, равномерности $\delta$	Плотность тока $j_0$ , А/м <sup>2</sup>
I	Диск: $a = R/\sqrt{2}$	15,5	20	1,58
	Кольцо: $a = R\sqrt{2}$ , $b = R$	18	22	1,83
II	Диск: $a = R\sqrt{2}$	15	49	3,06
	Кольцо: $a = R\sqrt{2}$ , $b = R\sqrt{2}$	17,5	21	3,58
III	Диск: $a = R\sqrt{4}$	10,5	156	0,85
	Кольцо: $a = R\sqrt{4}$ , $b = R\sqrt{8}$	13	85	1,06

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы и рекомендации.

Если внешний радиус кольца  $b$  не слишком близок к  $R$ , то кольцевая форма электродов обеспечивает более равномерное температурное поле по сравнению с дисковой и потому предпочтительнее при соответствующем выборе внешнего радиуса кольца.

Аномальный эффект в случае, когда  $b \sim R$ , объясняется влиянием теплоотдачи с поверхности, существенной в данном случае.

Из рассмотренных кольцевых электродов наибольшую равномерность при оптимальной силе тока обеспечивает вариант II (см. табл. 5.4), соответствующий среднему положению кольца:  $a = R\sqrt{2}$ ,  $b = R\sqrt{2}$ .

В таблице приведены также значения плотности тока на электродах. Видно, что плотность тока конкурирует с уровнем равномерности поля и в оптимальном, с точки зрения равномерности поля, варианте она оказывается наибольшей, хотя и не превышает допустимых значений.

Для уточнения рекомендаций по конструированию технического устройства необходимы расчеты для более широкого класса

моделей. Для их автоматизации с помощью ЭВМ нужна точная математическая формулировка задачи как вариационной, и такая формулировка возможна. Дело сводится к задаче о квазиминимизации целевого функционала  $\Phi(I, \vec{p})$ , где  $\vec{p}$  — совокупность параметров, характеризующих форму и размеры электродов из данного множества  $P$ :

$$\Phi(I, \vec{p}) \leq \delta, \quad \vec{p} \in P, \quad 0 \leq I \leq \bar{I}. \quad (5.27)$$

Поскольку нагреву подвергается цилиндрический брикет, занимающий область  $V = \{M(r, z, \varphi) \in E_3 : 0 \leq r \leq R, -l \leq z \leq l, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , то в качестве целевого функционала естественно выбрать

$$\Phi(I, \vec{p}) = \max_{M \in V} |t[M, I, \vec{p}] - \bar{t}|, \quad (5.28)$$

где  $t[M, I, \vec{p}]$  — температура в точке  $M$ , алгоритмически определенная условиями (5.22), (5.23) при каждой паре  $(I, \vec{p})$ .

Если выбор  $\vec{p}$  проводится, как выше, из небольшого числа возможных значений и так как размеры электродов заведомо ограничены размером  $R$ , а  $I \in [0, \bar{I}] \subset E_1$ , то задача (3.27) решается на некотором компакте  $Z = P \times [0, \bar{I}]$ . В этом случае она оказывается корректной по Тихонову при заданном допуске  $\delta$  [86], если  $\delta \geq \delta_0 = \inf_Z \Phi(I, \vec{p})$ .

В этом случае она может быть решена методом подбора на заранее заданном множестве, что и сделано выше для конкретного  $Z$ .

В более общем случае, например для непрерывного формфактора  $f(r)$ , задача может быть регуляризована в соответствии с методикой, изложенной в гл. 1, и примерами, приведенными ранее в настоящей книге.

Если принятая модель в основном адекватна реальному процессу, то автоматизированный расчет в реальном времени, основанный на машинной обработке температурных полей, получаемых программой-датчиком, может служить целям оперативного управления действующей установкой.

# О РАЦИОНАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ, ПЕРСПЕКТИВАХ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ

---

Настоящая глава написана преимущественно для непосредственных разработчиков и проектантов технологических процессов, организаторов технологического производства, включая управленческий персонал любого уровня. Она может оказаться весьма полезной для всех, кто заинтересован в проблеме управления качеством продукции.

Накопленный мировой опыт широкого внедрения компьютерной техники в машиностроении показал, что собственно компьютеры не улучшают дело, а собственно автоматизация не излечивает все недуги, прежде всего связанные с гарантией качества продукции (примем, что разработанная конструкторская документация на изделие определяет требуемое качество, так как в противном случае исправить технологией заложенные конструктором упущения практически невозможно).

Внедрение новой техники и технологии требует и новой организации дела, включая подготовку соответствующих кадров. Любая организация дел от комплексного управления технологическим блоком (цех, участок, автоматическая линия) до описания реального технологического многооперационного процесса есть многофакторный, а следовательно, многокритериальный процесс.

Основным инструментом таких сложных взаимозависимостей может быть только многокритериальный анализ. Иными словами, используя различные комбинации исходных возможных или допустимых данных, необходимо мысленно и численно показать, т. е. смоделировать, какие факторы положительно, а какие отрицательно скажутся на конечных результатах изучаемого процесса. Как скомбинировать (в модели) эти факторы и связи между ними таким образом, чтобы минимизировать все виды расходов (сырье, трудовые ресурсы, время труда и др.) и гарантировать установленный уровень качества продукции.

В рассмотренных выше (см. гл. 3, 4, 5) примерах решения конкретных задач, поставленных действующим производством ПО ЗИЛ, авторы хотели бы обратить внимание читателя не столько на частное имя постановщика задач и их экономические результаты, которые имеют самостоятельное значение, сколько на общность проблем, которая позволяет рассмотреть значительно больший

круг вопросов. Иными словами, как в медицине сконцентрировать внимание не на личности, а на болезнях и душевном состоянии.

Общепринятое выражение: «никогда не начинать дело, если не знаешь, как его вести к заданной цели, в переводе на инженерно-математический язык означает: промоделируйте и прикиньте в расчетах на ЭВМ, что получится при ваших исходных данных, тогда поймете пути проектирования технологии».

Старые посылки «сверлить по месту», «подгонять по месту» для современного серийного, а тем более крупносерийного или массового производства в условиях стабилизации высокого качества недопустимы.

Если авторы убедили вас, уважаемый читатель, что для разработанной чертежно-технической документации необходимо прежде всего промоделировать технологические пути изготовления деталей, то можно рассмотреть следующую экономическую сторону процесса моделирования, которая в реальном производстве еще мало учитывается. Оценка затрат на собственно моделирование, да и в целом на математическое обеспечение в области современной технологии, пока не нашла должного отражения в функционально-стоимостном анализе при подготовке и освоении в производстве нового изделия.

Развитие автоматизированных систем производства в различных его сферах, широкое внедрение компьютерной техники в практику машиностроительных предприятий существенно увеличивает и первичные капитальные вложения, и основные фонды. Естественно, и у производителей, и у теоретиков возникает интерес к оценке эффективности этих затрат, срокам окупаемости, которые усугубились нерациональным развитием АСУ на предприятиях в 60—70-х годах у нас и за рубежом. Говоря о критериях эффективности, обычно речь ведут о количественной оценке качественных характеристик, отражающих отношение достигнутых целей к затратам. Прямым показателем эффективности в этом случае может быть величина достигнутого результата, отнесенная к сумме затрат. Что же принять за показатель эффективности и как оценить его адекватность выбранному критерию — вопрос не простой и не однозначный, особенно применительно к аспектам математического моделирования.

Выше уже отмечалось, что наиболее перспективная область моделирования — проектирование новых, неизведанных путей, технологических процессов, следовательно, можно говорить не о достигнутой цели, а о сопоставлении различных вариантов с большими или меньшими затратами для заложенной цели, т. е. прямой экономический эффект отсутствует. Речь может идти о предотвращении различных расходов в будущей деятельности. При этом можно отметить, что к требуемой модели можно прибыть через ряд отвергнутых, т. е. тех, чья эффективность нулевая или тоже отрицательная, если учесть затраты на их проведение. В этих условиях только стратегическая оценка деятельности пред-

приятия позволяет оценить проблемы прогнозного моделирования и предусмотреть их в текущей хозяйственной деятельности. Существенно проще оценка моделирования в условиях аналоговой реконструкции. Здесь эффективность моделирования технологического процесса (обычно и одновременное решение задачи по управлению указанным процессом с учетом реальных отклонений) может быть успешно реализована. По крайней мере, необходимые для этого данные есть. Задача может быть хорошо структурирована с известными параметрами, подлежащими контролю и регулированию в случае управления, процедуры управления жестко фиксированы принятой оптимальной моделью, последствия управления известны и гарантируют требуемое качество готового продукта. В этих случаях получают конкретное решение и конкретные эффекты в натуральных или экономических показателях.

Так, в гл. 2 рассмотрен новый подход к ускоренному нагреву заготовок (под штамповку, ковку, прокатку, резку и т. д.), где требуется достаточно равномерный прогрев всего сечения до заданной температуры, за счет управления внешним температурным полем. Показано, что предложенная функция изменения температуры не ухудшает свойств материала при средней температуре 250 °С с отклонением по сечению не более 20 °С, а время нагрева достаточно больших сечений можно сократить в 2 раза. При указанной температуре обычно проводят рубку неотожженного сортового проката из конструкционных сталей в заготовительных цехах. Для систем газового и электрического обогрева это практически полуторкротное снижение расхода газа или электроэнергии. Последнее зависит от КПД систем и быстродействия исполнительных механизмов регулирования.

При температурах 500—600 °С, которые обычно используются и для подогрева под резку особовысокопрочных конструкционных сталей или для отпуска после закалки, кратковременного старения для изделий сечением 20×60×120 мм, также практически вдвое сокращается время равномерного нагрева при перепаде температур в пределах 20 °С. Если допускается больший перепад, то эффект может быть существенно выше.

Подобная задача управления температурным полем поверхности заготовки или детали путем ее предварительного равномерного нагрева открывает новые возможности при охлаждении нагретых тел. Практически это достигается управляемым охлаждением поверхности. Такое охлаждение позволяет получить дифференцированные свойства в различных сечениях одного изделия.

Так, введением дозированного, прерывистого охлаждения после индукционного поверхностного нагрева крестовин карданных валов грузовых автомобилей удалось на концах и торцах шипов, где основная работоспособность связана с сопротивлением контактной усталости и износу, на углеродистой стали (C = 0,6 %) получить гарантированную твердость  $\geq 62$  HRC, а у основания шипа, где разрушение определяется сопротивлением ударным

нагрузкам при изгибе и кручении, повышенный запас пластичности при твердости 48—52 НРС. Новый процесс дал значительный экономический эффект, связанный с заменой легированной стали 20ХГНТР на углеродистую и длительной цементации на индукционную закалку с управляемым охлаждением. Процесс успешно внедрен на ряде автозаводов страны и прежде всего в ПО ЗИЛ, где он был разработан.

В гл. 3 рассмотрена и еще одна возможность использования температурного поля поверхности образца как датчика определения теплофизических параметров реальной детали при быстром охлаждении, а следовательно, и управление этими характеристиками по заданной программе. Так, для конкретной стали 47ГТ и реальных деталей (полуоси грузовых автомобилей ЗИЛ) получены требуемое по заданной глубине структурное состояние и требуемое значение твердости на заданной глубине.

Интересно отметить, что процесс поверхностного индукционного упрочнения грузовых полуосей, разработанный и внедренный в ПО ЗИЛ более 15 лет назад под руководством И. Н. Шклярова, потребовал значительных по трудоемкости и стоимости экспериментальных проверок (см. например [69]) и при моделировании был принят на первой стадии заводчанами как способ практической проверки метода обратных задач и выработки производственного доверия к его результатам. К сожалению, традиционное недоверие к теории у производителей проявилось и здесь, хотя известно, что нет ничего практичней хорошей теории.

Проведенный анализ (см. гл. 3) не только полностью подтвердил правильность подхода и высокую точность полученных результатов, но и, несмотря на большой накопленный практический опыт эксплуатации за 15 лет, выявил резервы. В результате на установках для закалки сокращено без снижения эксплуатационных свойств время нагрева до 10 % и получен годовой экономический эффект около 10 000 рублей в расчете на одну высокочастотную установку для закалки автомобильных полуосей (подобных установок только в Минавтосельмаше около 100 ед.).

Если распространять этот опыт только в ПО ЗИЛ на все установки индукционного нагрева с общей мощностью более 500 тыс. кВт, эффект не трудно оценить.

Полученный теоретический материал и модели, рассмотренные в гл. 2 и 3, позволяют решить задачу для любых нагреваемых насквозь и поверхностно-упрочняемых цилиндрических изделий с заданным управлением равномерностью или неравномерностью упрочненного слоя по длине изделия. Последнее приобретает самостоятельное значение для осей переменного профиля, ступенчатых валов и т. д. Универсальный характер подхода при использовании метода обратных задач позволяет при незначительной модификации рассмотренных в гл. 2 и 3 задач для процессов нагрева и охлаждения использовать их для многих других технологических операций. Например, построение математических

моделей качества (твердости, шероховатости, разностенности) при полугорячем или горячем выдавливании цилиндрических деталей позволяет определить величину натягов при запрессовке по оценке изменения линейных размеров и др.

Важным следствием моделирования является еще и то обстоятельство, что в результате проделанной работы оказываются зафиксированными на машинном носителе готовые к тиражированию формализованные фрагменты широкого круга технологических операций или приемов, часто синтезированные из глубинных слоев индивидуальных инженерных знаний, иногда теряющихся с уходом практиков. Процесс формализации профессиональных знаний представляется еще одной важной стороной интеллектуальной деятельности, которая наиболее просто встраивается в рассмотренные в настоящей монографии методы обратных задач.

О том, что этим методом можно решать и более сложные технологические процессы, свидетельствуют материалы гл. 4, где одновременно с тепловыми рассмотрены и диффузионные процессы, происходящие при насыщении стали углеродом с последующей термической обработкой.

В этих процессах существенно больше критериев качества — заданная концентрация углерода на поверхности — оценка глубины слоя по заданному на границе содержанию углерода (например, глубина до 0,4 % C); темп падения переменной концентрации (например,  $\leq 10$  % от поверхностной на 1/3 толщины насыщенного слоя); допускаемые колебания в содержании углерода по всей глубине ( $< \pm 0,05$  % C); твердость сердцевины и др. Указанное перечисление критериев демонстрирует многообразие условий, оптимизация которых гарантирует требуемый для ответственных деталей машин и механизмов уровень и соотношение различных эксплуатационных характеристик.

Практическим результатом рассмотренных в гл. 4 процессов химико-термической обработки могут быть номограммы различных уровней, полученные обработкой численных результатов математического эксперимента. Номограммы могут быть полезны для управляющих систем, когда оборудование обеспечивается средствами автоматического регулирования технологических параметров. Они экономят затраты при разработке любых проектов технологии для новых изделий, так как машинное время воспроизведения цементации для уже рассмотренных критериев качества существенно меньше реального времени цементации. Ясно, что для больших сечений и глубин насыщения эффективность численного эксперимента на ЭВМ будет неуклонно возрастать. И здесь хотелось бы еще раз отметить, что из-за отсутствия или недостатка физических параметров процесса (конкретные свойства, например, новых сталей и сплавов, впервые используемых для цементации), когда невозможно реализовать прямое моделирование, успешно разыскивают недостающие параметры на основе интерпретации данных косвенных наблюдений, методом обратных задач [65, 53].

В частности, моделирование цементации показало, что весьма близкие (в пределах технологических допусков) результаты можно получить при различном наборе управляющих параметров. Поэтому, если известен наиболее дорогой или дефицитный технологический параметр (есть районы, где сложно с расходом газов или электроэнергии и пр.), можно минимизировать именно этот параметр.

В рассматриваемом в гл. 4 варианте минимизировалось время процесса регулированием углеродного потенциала и температуры среды. Посмотрим еще раз на результаты, представленные на рис. 4.14 — 4.16. Все критерии качества насыщения выдержаны для принятой группы управляющих параметров: концентрация на поверхности 0,8 % С; глубина до концентрации 0,6 % С; единая величина отклонения  $\pm 0,02$  мм, например общая глубина насыщения отличается максимально на 0,02 мм. Практически одинакова и кривая распределения углерода по слою. При всем этом длительность процесса можно менять от 15 до 4 ч, изменяя производительность процесса химико-термической обработки на 375 %. Когда были получены эти результаты, они удивили даже высококвалифицированных практиков. Представленные данные открывают перед технологами и организаторами управления производством широкий круг оперативных возможностей. Известно, например, что в крупносерийном и массовом производстве механообработывающие цехи работают в две смены, а термические цехи или участки — круглосуточно, происходит недогрузка термических печей и агрегатов при несогласованных объемах работ. При наличии данных типа представленных на рис. 4.14 — 4.16 мы снижаем производительность агрегатов, увеличив общее время процесса, но получаем в это время выигрыш в других компонентах (расход газов, мощность электронагревательных систем, износ подвижных систем управления и т. д.).

Таким образом, гарантируя требуемое качество, создаем широкие гибкие возможности для получения оптимального по эффективности решения при возникновении разнообразных производственных отклонений, причем их решение может осуществляться в реальном времени оперативного управления производством.

Формализованный подход к реальным технологическим процессам, который является основой при разработке математических моделей, позволяет выделить инвариантные модули модели, которые являются фундаментом для новых сходных или сходственных технологий. Именно такая возможность реализована в п. 5 гл. 4 при изучении диффузионных процессов в пористых системах, типичным представителем которых являются детали, изготовленные методами порошковой металлургии.

Моделирование, численный эксперимент на ЭВМ и последующая проверка на вкладышах рулевых тяг автомобилей ЗИЛ, изготовленных на основе спеченного железного порошка, позволили существенно (в несколько раз) сократить длительность на-

сбывания, уменьшить расход технологических газов, так как потенциал атмосферы был снижен с 0,8 до 0,5 % С. В результате понимания механизма были разработаны принципиально новые технологические процессы химико-термической обработки спеченных изделий при насыщении их углеродом или углеродом и азотом.

Важным является и то обстоятельство, что при определении значения результирующих параметров качества (концентрации, глубины слоя, твердости и др.) ошибка измерения в пределах одного процента гарантирована, а нескольких процентов с достаточно высокой точностью обеспечивает необходимое решение. Это обстоятельство очень важно, так как для многих реальных условий ошибка в 1 % больше в абсолютном значении точности измерения указанных величин (точность определения углерода или азота, точность замера структурных параметров при увеличении в 200—500 крат и т. д.) по стандартным методикам.

В ряде случаев как показано в п. 5 гл. 3, допустимо отклонение в измерении до 10 % для отдельных участков интересующих функций.

В гл. 5 на ряде конкретных примеров рассмотрена еще одна область разумного использования моделирования: прогнозирование новых технологических процессов.

Прежде всего отметим задачу прогнозирования внутреннего температурного поля заготовки по измерению температуры поверхности. В конкретно поставленной задаче речь шла об использовании остаточной теплоты после штамповки для предварительной термической обработки с ковочного нагрева и близкой проблеме, связанной с использованием теплоты непрерывно-литых заготовок при их последующем подогреве для штамповки автомобильных деталей.

Проведенный математический эксперимент показал, что ошибка до 5 % при измерении температуры поверхности (для интересующих диапазонов температуры 1500—700 °С и имеющих в производстве приборов) вполне достаточно обеспечивает получение интересующего профиля температурного поля. Еще хотелось бы обратить внимание читателя при анализе этой главы на сопоставление в возможностях реализации рассмотренной проблемы при решении прямым или обратным методами. Дело в том, что трудности в сложных условиях теплообмена с окружающей средой с переменными по времени не позволяли из-за сложности математической задачи и ее плохой адаптации к изменению внешних условий использовать метод решения Стефано [19] при прямом моделировании, а обратная задача была решена относительно просто, правда, пока только для цилиндрических изделий.

Знание распределения температурного поля заготовки по данным температуры поверхности крайне важно при разработке процессов непрерывной разливки стали.

И еще об одной, пока не решенной, но крайне важной области использования подобных обратных задач.

Большие сложности возникают сейчас при разработке автоматического проектирования технологических процессов при обработке литых деталей на станках с ЧПУ и собственно в литейном производстве. Причем основная трудность при решении прямых задач заключается в геометрической интерпретации сложных криволинейных поверхностей произвольного, эмпирического профиля, определяющихся не требованием конструктора, а технологией изготовления литых деталей. Доля таких поверхностей в автотракторных отливках достигает 40 %.

Для геометрического описания элементов сложной отливки с граничной поверхностью произвольного вида обычно используют различные методы аппроксимации на основе полиномов, сплайн-функций, после чего следует использование аппарата логических операций и т. д.

Вместе с тем основная причина создания столь сложных поверхностей — отсутствие данных о реальном температурном поле в интересующих сечениях отливки, а следовательно, незнание реальных условий для фазовых и структурных превращений в нем.

Рассмотренные в настоящей монографии обратные задачи по изучению температурного поля сечения по известной температуре поверхности, а также задача (см. гл. 3) об эффекте взаимодействия конкурирующих тепловых потоков при поверхностной закалке, надежно устанавливающих необходимое время процесса (в примере речь идет о изотермической выдержке), показывают целесообразность использования указанного метода и для различных процессов литейного производства. Понятно, что это самостоятельная трудоемкая задача, которая должна моделировать процессы кристаллизации в затвердевающей отливке с учетом не только теплопереноса с поправкой на теплоту происходящих реакций фазового превращения, но и процессов гидродинамики движущегося жидкого потока. Однако сама постановка задачи правомерна и обеспечена математическим аппаратом для проверки. Решение подобной задачи откроет принципиально новые подходы к конструкции литых деталей и их последующей механической обработке в автоматических линиях и системах; резко упростит конструирование сложной технологической оснастки (пресс-формы для литья под давлением) и многое другое.

Для проектировщиков и технологов, связанных с температурной обработкой биметаллических систем, занимающихся восстановлением изношенных деталей методами газотермического напыления или наплавки износостойких материалов на металлическую основу, может представить интерес математическое моделирование процессов ускоренного нагрева системы из сталей Р6М5 и У8 (см. п. 5.2) и ее математическое описание в гл. 2. Следует опять обратить внимание на то, что можно подобрать несколько наборов

управляющих факторов нагрева, гарантирующих отсутствие разрушений, отслоений на границе раздела двух систем при обеспечении требуемых свойств поверхности. Приведенный в гл. 5 анализ поможет оценить состояние биметаллических систем в процессе эксплуатации и условиях повторно-переменных нагревов при взаимодействии инструмента с обрабатываемой деталью или в конструкциях, работающих в условиях термодиклирования.

В п. 5.3 рассмотрены задачи, связанные с технологическими процессами при производстве изделий методами порошковой металлургии. Изготовление металлических порошков наиболее распространенным в мире методом распыления расплава в потоке жидкости или газа сталкивается с проблемой гранулометрического состава, когда при производстве порошков нежелательны крупные фракции, а при производстве металлических гранул, например, для воздушных фильтров разнообразных двигателей внутреннего сгорания, нежелательны мелкие фракции. И те и другие сортируются, сушатся, брикетируются и идут на переплав.

Рассмотренный в п. 5.3.2 подход к решению задачи оптимизации гранулометрического состава порошковых смесей открывает новые области для использования так называемых отходов. Прежде всего это возможность повышения плотности засыпки до 0,79 за счет включения подсчитанного объема частиц меньшего радиуса и при засыпке двух фракционных систем. Основная трудность при реализации этих рекомендаций в производстве связана с получением и контролем размеров сверхтонких фракций. Однако опубликованные в последнее время данные о получении порошковых частиц графита и некоторых других на уровне кластерных образований диаметром менее 0,1 мм свидетельствуют, что рассмотренные модели тоже близки к реализации в производстве.

Вместе с тем уже сегодня при производстве фильтров из бронзовых гранул для тормозной аппаратуры грузовых автомобилей, представляющих собой усеченные конусы различных размеров, донья и верхние торцевые поверхности должны изготавливаться с существенно большей плотностью для обеспечения прочности и жесткости изделия, а рабочие поверхности с заданной по величине сопротивления воздушной среде большей пористостью. Использование изложенных соображений может снизить потери от брака и переработки, заметно повлиять на улучшение качества готовых деталей. Такие же проблемы свойственны и для керамических пористых материалов, поэтому рассмотренную модель, скорректированную на размеры частиц, можно опробовать и в этих сферах.

Заканчивая рассмотрение практических реализаций промоделированных и опробованных в разнообразных технологических процессах, отметим, что даже при процессах спекания порошковых изделий, где по ряду опубликованных ранее работ не ожидалось возможного сокращения длительности обработки для тра-

диционных температур спекания железных порошков 1030—1070 °С, определены условия, в которых реально заметно сокращение длительности технологических операций. Практическая полезность моделирования может быть усилена при использовании рекомендаций, изложенных в гл. 2.

Рассмотренные общие подходы и конкретные примеры математического моделирования типичных технологических операций к процессам в машиностроении и металлургии показали, что метод обратных задач и основные положения теории регуляризации с высокой эффективностью можно использовать как для определения различных физических параметров, необходимых для производственной практики, так и для системного анализа при определении оптимальных условий различных многофакторных систем.

Полученные практические результаты решения конкретных инженерных задач ПО ЗИЛ показывают новую перспективную область — использование метода обратных задач при определении оптимальных управляющих параметров как для оптимизации действующих, так и для функционально-стоимостного анализа и вновь разрабатываемых процессов и оборудования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
2. Алифанов О. М., Румянцев С. В. Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач//Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 6. С. 1289—1291.
3. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 380 с.
4. Агурьева В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 728 с.
5. Бальшин М. Ю. Научные основы металлургии и металлургия волокна. М.: Металлургия, 1972. 335 с.
6. Блантер М. Е. Теория термической обработки. М.: Металлургия, 1984. 328 с.
7. Блантер М. Е. Фазовые превращения при термической обработке стали. М.: Металлургиздат, 1962. 268 с.
8. Бокштейн Б. С. Диффузия в металлах: Учебное пособие. М.: Металлургия, 1978. 248 с.
9. Борисов В. Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка.: М.: Металлургия, 1987. 223 с.
10. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике М.: Мир, 1982. 248 с.
11. Будак Б. М. О методе прямых для некоторых квазилинейных краевых задач параболического типа//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 6. С. 1105—1112.
12. Булычев Е. В., Гласко В. Б. О единственности в некоторых обратных задачах теории теплопроводности//Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45, № 2. С. 305—309.
13. Булычев Е. В., Гласко В. Б., Федорова С. М. О восстановлении начальной температуры по ее измерениям на поверхности//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 6. С. 1410—1416.
14. Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н. Оптимальное управление нагревом металла. М.: Металлургия, 1972. 440 с.
15. Вабищевич П. Н., Гласко В. Б., Криксои Ю. Н. О решении одной задачи Адамара с помощью регуляризованного по А. Н. Тихонову алгоритма//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 6. С. 1462—1470.
16. Варгафтик Н. Б. Теплофизические свойства вещества. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1956. 367 с.
17. Васильева А. Б., Бутузова В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
18. Васильева А. Б., Свешникова А. Г., Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.
19. Васильев Ф. П. Разностный метод решения задач типа Стефано для квазилинейного параболического уравнения с разрывными коэффициентами//Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 6. С. 1280—1283.

20. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
21. Влияние гранулометрического состава и формы частиц порошка на уплотняемость при засыпке и прессовании/В. Д. Кальнер, М. Н. Горюшина, Я. В. Шуберт, В. В. Власенков//Конструирование, исследование, технология и экономика производства автомобиля. М.: Машиностроение, 1984. Вып. 12. С. 94—99.
22. Выбор оптимальной толщины теплоизоляции при горячем компактировании пористых материалов/Е. А. Вишневская, Б. В. Гласко, А. И. Молокостов и др.//Инженерно-физический журнал. 1987. Т. 52, № 5. С. 822—827.
23. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984. 111 с.
24. Гласко В. Б. Регуляризирующие по Тихонову операторы для решения некоторых обратных задач геофизики и теплопроводности//Тр. международного математического центра им. С. Банаха. Вычислительная математика. Варшава: Изд-во научных публикаций Польши, 1984. Т. 13. С. 205—235.
25. Гоичарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 336 с.
26. Гудремов Э. Специальные стали. М.: Металлургия, 1966. Т. 1. 952 с.
27. Гуляев А. П. Термическая обработка стали. М.: Машгиз, 1960. 495 с.
28. Гуляев А. П. Металловедение. М.: Металлургия, 1977. 647 с.
29. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов: Справочник. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
30. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М.: Металлургия, 1971. 265 с.
31. Зайкин П. Н., Меченов А. С. Некоторые вопросы численной реализации регуляризирующего алгоритма для линейных интегральных уравнений первого рода//Вычислительные методы и программирование. 1973. Вып. 21. С. 155—163.
32. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.
33. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа М.: Наука, 1980. Ч. II. 447 с.
34. Искандеров А. Ю. Обратные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения (Тезисы доклада Всесоюзной школы-семинара. Самарканд. 1983). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. С. 108—109.
35. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
36. Кальнер В. Д. Технология термической обработки в автомобилестроении//Термическая обработка в машиностроении: Справочник/Под ред. Ю. М. Лактина, А. Г. Рахштадта. М.: Машиностроение, 1980. Гл. 18. С. 524—562.
37. Кальнер В. Д., Оачинникова А. Г., Симбирский А. А. Напряженное состояние матриц холодной объемной штамповки//Металловедение и термическая обработка металлов. 1984. № 7. С. 47—49.
38. Карслуо Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
39. Кобаско Н. И. Исследование с помощью ЭВМ тепловых процессов при закалке стали//Металловедение и термическая обработка металлов. 1976. № 10. С. 8—13.
40. Коааленко М. С. Теоретические основы горячей обработки пористых материалов давлением. Киев: Наукова думка, 1980. 240 с.
41. Кокс М. Зависимость деформационного упрочнения и низкотемпературной ползучести//Теоретические основы инженерных расчетов. 1976. № 1. С. 84.
42. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
43. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
44. Крикин Ю. А. О пористости плотноупакованного порошка из сферических частиц//Докл. АН СССР, 1982. Т. 265, № 4. С. 798—801.
45. Контроль качества термической обработки стальных полуфабрикатов и деталей: Справочник/Под общ. ред. В. Д. Кальнера. М.: Машиностроение, 1984. 384 с.

46. Лаарентьева М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

47. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

48. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1987. Т. 7. 248 с.

49. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.

50. Леонидова М. Н., Шаарцман Л. А., Шульд Л. Н. Физико-химические основы взаимодействия металлов с контролируруемыми атмосферами. М.: Металлургия, 1980. 264 с.

51. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение металлов. М.: Мир, 1970. 443 с.

52. Макоаский В. А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. М.: Металлургия, 1971. 384 с.

53. Математическое моделирование процесса цементации компактных и пористых материалов/В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик и др.//Металловедение и термическая обработка металлов. 1986. № 1. С. 11—14.

54. Математическое моделирование теплового профиля валка/Н. В. Диличэнский, В. И. Коннов, П. В. Севастьянов, Н. В. Туманов//Физика и химия обработки материалов. 1984. № 6. С. 29—34.

55. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 с.

56. Морозов В. А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8, № 2. С. 295—309.

57. Мызылев Н. В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 10, № 2. С. 388—400.

58. Музылев Н. В. О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 1. С. 102—108.

59. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 650 с.

60. Нитроцементация порошковых материалов на основе железа/В. А. Ковригин, М. Н. Горюшина, В. П. Романов, Б. С. Старокожем//Металловедение и термическая обработка металлов. 1984. № 7. С. 37—39.

61. Номограммы нелинейного процесса цементации металлических деталей/В. Д. Кальнер, С. А. Юрасов, В. Б. Гласко и др.//Металловедение и термическая обработка металлов. 1986. № 1. С. 7—11.

62. О математическом моделировании процесса индукционной закалки стальных образцов/Н. И. Кулик, В. Б. Гласко, А. Н. Тихонова и др.//Инженерно-физический журнал. 1982. Т. 28, № 6. С. 955—660.

63. О математическом проектировании ЯМР-томографа//А. Н. Тихонов, И. Б. Рубашов, В. Я. Арсенин и др. М.: 1987. № 134. 24 с. (Препр. АН СССР. Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша.)

64. О математическом моделировании одного технологического процесса/М. К. Трубецков, А. Н. Тихонов, И. Н. Шклярова и др.//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 3. С. 681—692.

65. О некоторых обратных задачах, связанных с управлением диффузионными и тепловыми процессами/И. А. Богомолова, В. Б. Гласко, В. Д. Кальнер и др.//Инженерно-физический журнал. 1987. Т. 53, № 5. С. 842—849.

66. О некоторых алгоритмах приближенного решения некорректных задач на множестве монотонных функций/А. В. Гончарский, Л. Г. Гушина, А. С. Леонов, А. Г. Ягола//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 283—297.

67. Об оптимизации равномерного нагрева металлических деталей при химико-термической обработке/В. Б. Гласко, А. В. Захаров, М. Е. Ильин, Ю. А. Повещенко. М., 1983. № 45. 14 с. (препр. АН СССР. Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша).

68. Прогрессирующие процессы термической обработки деталей/О. А. Попов, А. Н. Куланов, В. А. Бойков//Автомобильная промышленность. 1983. № 8. С. 24—25.
69. Прогнозирование свойств стальных деталей после индукционной закалки моделированием процесса на ЭВМ/И. Н. Шкляров, Б. В. Гласко, Н. И. Кулик и др.//Металловедение и термическая обработка металлов. 1980. № 9. С. 4—8.
70. Пытеев Ю. П. Подавление ложных сигналов в задаче повышения разрешения//Докл. АН СССР. 1980. Т. 225, № 3. С. 540—544.
71. Саарейский Е. Ф., Гласко В. Б., Гранит Я. А. Зависимость фазовой и групповой скоростей волн Релея и Лява от параметров двуслойной земной коры/Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967. № 3. С. 35—42.
72. Савин И. В., Гласко В. Б., Саваренский Е. Ф. Об алгоритме вычисления частных производных неявной функции в обратных задачах сейсмологии//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 1. С. 36—43.
73. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
74. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
75. Самойлович Ю. А., Крулевецкий С. А., Горячнов В. А. Тепловые процессы при непрерывном литье стали. М.: Металлургия, 1982. 152 с.
76. Савенников А. Г. Прямые и обратные задачи электродинамики: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977. С. 287—298.
77. Синтез оптических покрытий/А. Г. Савенников, А. В. Тихомиров, С. А. Яншин//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 4. С. 929—936.
78. Система автоматизации прочностных расчетов/Е. П. Велихов, В. Б. Бетелик, Ю. С. Вишняков и др.//Прикладная информация. 1985. № 6. С. 22—44.
79. Создание интерактивной системы обработки графической информации в машиностроении/Е. П. Велихов, В. Б. Бетелик, Ю. С. Вишняков и др. М.: НИИНАвтопром, 1984. 19 с.
80. Старостенко В. И. Устойчивые методы в гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 227 с.
81. Страхов В. Н. О применении теории регуляризации при решении линейных некорректных задач магнито- и гравиметрии: Географические исследования на Украине. Киев: Техника, 1971. С. 144—151.
82. Стрейг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 347 с.
83. Термическая обработка в машиностроении: Справочник/Под ред. Ю. М. Лактиина и А. Г. Рахштадта. М.: Машиностроение, 1980. 783 с.
84. Тихонов А. Н. Математические модели и научно-технический прогресс (автоматизация обработки наблюдений)//Наука и человечество. М.: Знание. 1979. С. 283—289.
85. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 1. С. 38—47.
86. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
87. Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1373—1383.
88. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач//Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49—52.
89. Третьяков А. В., Гарбер Э. А., Шичко А. Н. Совершенствование теплового процесса листовой прокатки. М.: Металлургия, 1973. 304 с.
90. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л.: Физматгиз, 1963. 736 с.
91. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1978. 534 с.

92. Шаталова И. Г. Физико-химические основы вибрационного уплотнения порошковых материалов. М.: Наука, 1965. 163 с.
93. Шмыков А. А. Справочник термиста. М.: Машгиз, 1961. 390 с.
94. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1977. 344 с.
95. Debbas S., Rumpf H. On the randomness of beds packed with spheres or irregular shaped particles//Chemikal Engineering Science. 1966. V 21, N. 617. P. 583—607.
96. Fedors R. F., Landel R. F. An Empirical method for the estimating effect of particles of different size and prosity.//Powder Technology. 1979. V. 23. P. 225—231.
97. Hildebrand J. H., Morrel M. E. The distribution of molecules in a model liquid//Chemical Physics. 1936. V. 4. P. 224—228.
98. Hollomon L. H. Quantitative description of deformation strengthening of metals.//Transactions of AIME. 1945. V. 162. P. 268—290.
99. Levin M. M., Chernick J. A numerical model of random packing of spheres//Nature. 1965. V. 208, N. 5005. P. 68—69.
100. Lewis C. F. A practical way to determine carburizing time and temperature.//Metall Progress. 1969. V. 93, N. 3. P. 90—93.
101. Ludwik P. Elemente der technologischen mechanik. Verlag von Julius Springer. Berlin, 1909. 57 S.
102. Ludwik P. Über den Einfluss der deformation geschwindigkeit bei Bleibenden deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungserscheinungen//Physicalische Zeitschrift. 1909. V. 10. P. 411—417.
103. Solomon H. Random packing density//Proc. Fifth Berkeley Symposium. Mathematical Statistics and Probability. 1967. V.3. P. 119—134.
104. White H. E., Walton S. F. Packing and particle shape//Journal of Americal Cer. Society. 1937. V. 20, N. 5. P. 155—165.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕН ЦЕМЕНТАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ

В п. 4.4 предложены номограммы оптимального времени технологического процесса, позволяющие сократить время решения задачи оптимизации на информационно-управляющем комплексе. В таблице приведены значения управляющих параметров при оптимальном времени цементации для различных наборов выходных параметров (реперных точек). Эта таблица получена по изложенной методике, дополняет информацию, приведенную в соответствующем разделе основного текста, и может быть с успехом использована на практике.

Значения управляющих параметров при оптимальном времени цементации

$\frac{C_{пов}}{C_{гр}/k_{гр}}$	$C_{макс окр}$	$C_{мин окр}$	$t_1$	$t_2$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_{опт}$
	%		° C		r		
$\frac{0,8}{0,5/0,5}$	1,155	0,800	1008,47	840	1,24	2,24	2,4
$\frac{0,8}{0,5/0,8}$	1,155	0,806	1004,98	840	2,82	4,00	5,0
$\frac{0,8}{0,5/1,1}$	1,144	0,798	964,29	840	5,61	10,27	11,0
$\frac{0,8}{0,6/0,5}$	1,155	0,811	985,82	840	2,63	2,93	4,0
$\frac{0,8}{0,6/0,8}$	1,155	0,805	1007,89	840	3,73	6,33	4,0
$\frac{0,8}{0,6/1,1}$	1,155	0,805	1004,85	840	6,78	9,00	15,0

$\frac{C_{пов}}{C_{гр}/k_{гр}}$	$C_{max}$ окр	$C_{min}$ окр	$t_1$	$t_2$	$v_1$	$v_2$	$v_{опт}$
	%		° C		r		
$\frac{0,8}{0,7/0,2}$	1,133	0,830	902,63	840	2,30	3,47	4,0
$\frac{0,8}{0,7/0,5}$	1,155	0,799	973,86	840	4,26	6,07	7,0
$\frac{0,8}{0,7/0,8}$	1,155	0,793	1029,97	840	4,77	10,27	11,0
$\frac{0,8}{0,7/1,1}$	1,155	0,798	1003,22	840	11,33	13,33	20,0
$\frac{0,8}{0,8/0,2}$	1,133	0,841	970,05	840	4,33	8,67	10,0
$\frac{0,8}{0,8/0,5}$	1,155	0,805	983,64	840	10,09	11,00	15,0
$\frac{0,8}{0,8/0,8}$	1,155	0,794	1038,02	840	12,00	12,33	20,0
$\frac{0,8}{0,8/1,1}$	1,144	0,795	1049,98	840	16,00	20,38	30,0

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Математическое моделирование и метод обратных задач . .	5
1.1. Класс обратных задач . . . . .	12
1.1.1. Понятие и типы обратных задач . . . . .	12
1.1.2. Математическая особенность обратных задач . .	14
1.1.3. Элементы обобщающих классических постановок обратных задач различных типов и вопросы их корректности . . . . .	18
1.2. О корректной постановке обратных задач и понятии регуляризации . . . . .	25
1.2.1. Введение задачи в класс корректных (условно-корректная постановка задачи) . . . . .	25
1.2.2. Понятие квазирешения . . . . .	28
1.2.3. Принцип регуляризации для задач интерпретации . . . . .	29
1.2.4. Задача о квазимиимизации и регуляризирующий алгоритм (оператор) для задач интерпретации . .	30
1.2.5. О корректных постановках задач других типов . . . . .	32
1.2.6. Понятие стабилизатора Тихонова и связанные с ним обобщенно-корректные постановки обратных задач . . . . .	34
1.2.7. Сглаживающий функционал Тихонова и связанные с ним постановки . . . . .	38
1.2.8. О роли стабилизатора при выборе единственного решения в неопределенных задачах . . . . .	39
1.3. Регуляризирующие операторы (алгоритмы) . . . . .	41
1.3.1. Понятие регуляризирующего оператора и их типы . . . . .	41
1.3.2. Регуляризирующие операторы в задачах синтеза и управления . . . . .	44
1.3.3. Общий регуляризирующий оператор Тихонова . . . . .	46
1.3.4. Пример адаптивного регуляризирующего оператора . . . . .	53
Глава 2. Задачи оптимального управления нагревом деталей с помощью внешнего температурного поля . . . . .	57
2.1. Целевая постановка задачи управления нагревом . .	58
2.2. Математическая постановка задачи управления нагревом . . . . .	58
2.2.1. Фундаментальная постановка задачи управления . . . . .	58
2.2.2. Возможные математические постановки задачи управления квазиравномерным нагревом . . . . .	60
2.2.3. О выборе типа управляющих функций и некоторых простых решениях задачи управления . . . . .	61
2.3. Методы решения задачи для различных моделей . . . .	65

2.3.1. Общая методика решения вариационных задач, связанных с квазиравномерным нагревом . . . . .	65
2.3.2. Методика решения задачи для линейного процесса квазиравномерного нагрева . . . . .	67
2.3.3. Методика решения задачи для уточненной пространственно-трехмерной модели при квазилинейном нагреве . . . . .	73
2.3.4. О решении уточненной задачи управления в произвольной области . . . . .	79
2.4. Некоторые результаты решения задач квазиоптимального нагрева . . . . .	84
2.4.1. Результаты математического эксперимента для линейного процесса . . . . .	84
2.4.2. Результаты математического эксперимента для уточненной модели плиты . . . . .	86
2.4.3. Примеры решения задач в произвольной области . . . . .	88
<b>Глава 3. Моделирование поверхностной закалки стальных деталей. . . . .</b>	<b>91</b>
3.1. Физическое содержание технологического процесса и условия постановки задачи . . . . .	91
3.2. Математическая модель процесса и степень ее физической определенности . . . . .	92
3.3. Об определении характеристики источника нагрева под закалку по заданному температурному режиму на границе образца . . . . .	97
3.3.1. Корректная постановка задачи и различные подходы к ее решению . . . . .	97
3.3.2. Пошаговый регуляризирующий алгоритм поиска управляющей функции . . . . .	99
3.3.3. О сведении краевой задачи и системе линейных алгебраических уравнений . . . . .	101
3.3.4. Результаты решения задачи управления нагревом под закалку . . . . .	104
3.4. Об определении поверхностного теплообмена и коэффициента теплопроводности при быстром охлаждении по результатам измерения температурного поля на поверхности образца . . . . .	107
3.4.1. Использование данных о температурном поле на поверхности при постановке задачи о законе теплообмена . . . . .	107
3.4.2. Регуляризирующий алгоритм и результаты поиска закона теплообмена . . . . .	108
3.4.3. Об использовании температурного поля на поверхности образца в качестве дополнительной информации для определения теплофизических параметров материала при быстром охлаждении . . . . .	110
3.5. Результаты математического моделирования процесса индукционной закалки и решение задач целевого управления . . . . .	115
3.5.1. Математический эксперимент по изучению температурного поля в динамическом режиме закалки. . . . .	115
3.5.2. Вопросы обработки результатов математического эксперимента и автоматизация управления . . . . .	120
3.5.3. Номограмма нагрева под закалку ( $d$ -номограмма) . . . . .	122
3.5.4. Номограммы закалки ( $\Delta^{(I)}$ — номограмма) . . . . .	124
3.5.5. Распределение твердости по сечению образца и оценка его эксплуатационной прочности . . . . .	132
3.5.6. Номограммы «эффективной» твердости ( $\theta$ -номограммы) . . . . .	137
	261

3.6. О возможности метода обратных задач для изучения технологических процессов, связанных с фазовыми превращениями, и управления этими процессами . . . . .	139
3.7. О математическом моделировании процесса индукционной закалки образца, вращающихся в электромагнитном поле . . . . .	141
3.7.1. Физическое содержание задачи и математическая модель процесса . . . . .	141
3.7.2. Возможные постановки и алгоритмы решения обратной задачи управления процессом нагрева под закалку . . . . .	145
3.7.3. Об алгоритмах решения задачи прямого моделирования . . . . .	150
3.7.4. Некоторые результаты математического моделирования процесса закалки в ленточном индукторе . . . . .	155
<b>Глава 4. О задачах математического моделирования процесса цементации стальных образцов . . . . .</b>	<b>158</b>
4.1. Целевая постановка задачи математического моделирования процесса цементации . . . . .	158
4.2. Математическое моделирование процесса цементации в компактных материалах с известными параметрами . . . . .	159
4.2.1. Физические предпосылки и математическая модель процесса диффузии . . . . .	159
4.2.2. Комплекс математических методов для моделирования процесса . . . . .	161
4.3. Номограммы нелинейного процесса цементации для компактных материалов . . . . .	162
4.3.1. Постановка задачи обработки результатов эксперимента . . . . .	162
4.3.2. Номограммы первого уровня . . . . .	165
4.3.3. Номограммы второго уровня . . . . .	167
4.3.4. Номограммы третьего уровня . . . . .	170
4.4. Возможности решения задачи об автоматизированном управлении технологическим процессом . . . . .	172
4.4.1. Различные модели управления процессом и целевые постановки задачи управления . . . . .	172
4.4.2. Предварительная оценка эффекта трехстадийного управления с помощью углеродного потенциала среды . . . . .	175
4.4.3. Математическая постановка задачи трехстадийного управления цементацией в автоматическом режиме . . . . .	177
4.4.4. Примеры решения задачи трехстадийного управления процессом цементации в автоматическом режиме . . . . .	180
4.4.5. Постановка и возможности решения задачи о непрерывном и многостадийном управлении с помощью углеродного потенциала . . . . .	186
4.5. Постановка и решение некоторых обратных задач, связанных с восполнением информации о физической модели процесса . . . . .	191
4.5.1. О моделях диффузионного процесса в пористых средах . . . . .	191
4.5.2. Проверка одной гипотезы о механизме диффузии в пористых материалах . . . . .	196
4.5.3. Задача об определении термодинамического коэффициента по минимальной информации о поле концентраций в процессах цементации . . . . .	200

<b>Глава 5. Прогнозирование новых элементов некоторых технологических циклов методами математического моделирования</b>	<b>204</b>
5.1. Задача прогнозирования внутреннего температурного поля заготовки по измерениям температуры на поверхности образца	204
5.1.1. Содержание задачи и ее связь с производственным циклом	204
5.1.2. Математическая постановка задачи и регуляризация ее решения	205
5.1.3. Результаты математического эксперимента	207
5.2. Математическое моделирование процесса высокотемпературного нагрева биметаллической заготовки	208
5.2.1. Целевая постановка задачи математического моделирования	208
5.2.2. Математическая модель процесса индукционного нагрева	209
5.2.3. Математический эксперимент на ЭВМ и его результаты	211
5.2.4. Математическая модель и расчет поля термоупругих напряжений в биметалле	215
5.2.5. Возможности постановки задачи оперативного управления технологическим процессом	218
5.3. Некоторые задачи порошковой металлургии	219
5.3.1. Целевая постановка некоторых задач математического моделирования в области порошковой металлургии	219
5.3.2. Геометрический подход к решению задачи оптимизации гранулометрического состава порошковых смесей	221
5.3.3. Обобщенная постановка задачи оптимизации гранулометрического состава порошковой смеси и ее решение методом стохастического моделирования на ЭВМ	227
5.3.4. Математическое моделирование спекания пористых образцов в газовых печах	233
5.3.5. О математическом моделировании контактного способа спекания образцов	236
<b>Глава 6. О рациональных областях, перспективах и эффективности использования математического моделирования в производственной технологии</b>	<b>243</b>
<b>Список литературы</b>	<b>253</b>
<b>Приложение. Значения управляющих параметров при оптимизации времен цементации для непрерывного управления процессом</b>	<b>258</b>

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Тихонов Андрей Николаевич,  
Кальнер Вениами Давыдович,  
Гласко Владиен Борисович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
И МЕТОД ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

Редактор *Н. Г. Сальникова*  
Переплет художника *Р. А. Казакова*  
Художественный редактор *В. В. Вершинкина*  
Технический редактор *Л. П. Гордеева*  
Корректоры: *И. М. Борейша, О. Е. Мишина*

ИБ № 6515

Сдано в набор 24.05.89. Подписано в печать  
05.10.89. Т-04994. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага  
офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать  
офсетная. Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 16,5.  
Уч.-изд. л. 18,4. Тираж 4700 экз. Заказ 784.  
Цена 3 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство  
«Машиностроение» 107076, Москва, Стромыв-  
ский пер., 4

Типография № 6 ордена Трудового Красного  
Знамени издательства «Машиностроение» при  
Государственном комитете СССР по печати,  
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10